937 Bethgea

Darstellung der Bahn 1916–1929 unter vergleichender Verwendung verschiedener Methoden

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

Genehmigt von der

Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin

Von

Hermann von Schelling
aus Berlin.

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Dezember 1930.
Tag der Promotion: 24. Februar 1931.

KIEL 1931.
Druck von C. Schaidt, Inhaber Georg Oheim.
15061

184

Referenten: Professor Dr. *A. Kopff*

Professor Dr. *P. Guthnick*

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen lieben Eltern

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547615_0024

937 Bethgea

Darstellung der Bahn 1916-1929 unter vergleichender Verwendung verschiedener Methoden.

Inhaltsübersicht.

Einleitung 1

1. Prüfung der Methode *Harzer* bei der ersten Bahnbestimmung 1
   Allgemeiner Überblick über die Methode 1
   Numerische Beispiele 2
   Würdigung der Methode 4
   nach den Kontrollmöglichkeiten 4
   nach dem Arbeitsaufwand 4
   nach der erzielbaren Genauigkeit 5

2. Verbesserung des Elementensystems (II) 10
   a) Darstellung der Beobachtungsreihe 1920 10
   b) Darstellung der Beobachtungen aus den Oppositionen von 1916, 1920, 1923, 1927 und 1929 . . 11
   Methode der speziellen Elementenstörungen . . . 11
   Methode *de la Villemarqué* 12
   Methode *Brendel* 15

Verzeichnis der Beobachtungen 17

Diese Arbeit setzt es sich zum Ziel, die Bahnelemente des Planeten 937 Bethgea genauer festzulegen. Bei dieser Gelegenheit soll zur ersten Bahnbestimmung die Methode *Harzer* benutzt werden, die selten zur Anwendung kommt, obwohl ihr Aufbau in seiner Klarheit unbedingt bestechend wirkt. Die Methode wird in bezug auf den erforderlichen Arbeitsaufwand und die erzielbare Genauigkeit geprüft werden. Die der abschließenden Bahnverbesserung voraufgehende Störungsrechnung wird nach der Methode der speziellen Elementenstörungen durchgeführt werden. Da für unseren Planeten auch die Koeffizienten der allgemeinen Störungen nach dem Verfahren von *de la Villemarqué*[1]) und *Brendel*[2]) vorliegen, werden wir zum Vergleich auch diese beiden Methoden heranziehen und ihre Anwendungsmöglichkeit prüfen. Für das *Brendel*sche Verfahren ergeben sich dabei deutlich gewisse Schranken. Durch Hinzunahme dieser verschiedenen Methoden erweitert sich die rein numerisch engere Aufgabe zu einer Untersuchung, der, wie wir hoffen, eine über das spezielle Beispiel hinausgehende Bedeutung zukommt.

Zur ersten Bahnbestimmung werden die Beobachtungen benutzt, die 1920 von Sept. 17 bis Dez. 3 auf dem Königstuhl und in Wien gemacht wurden. Sie umfassen zusammen 21 Daten und sind in AN **214**.113 und 371 veröffentlicht. Zur weiteren Festlegung der Bahn dienen Beobachtungen aus den Jahren 1916 (Heidelberg; AN **204**.403 und **206**.63), 1923 (Simeïs), 1927 (Simeïs und Königstuhl) und 1929 (Königstuhl). Die Daten aus den drei letzten Oppositionen verdanke ich der freundlichen Vermittlung des Astronomischen Recheninstituts zu Berlin-Dahlem.

1. Prüfung der Methode von *Harzer* bei der ersten Bahnbestimmung.

Herr Geheimrat Prof. *Harzer* hat in den AN Bd. 195, Nr. 4674, »Über eine kurze Methode der Bestimmung einer Planetenbahn nach drei Beobachtungen« geschrieben und später zu diesem Artikel noch einen Zusatz gegeben (AN **208**.153). Derselbe schließt mit den Worten:

»Ob meiner Methode die Arbeitsersparung und Arbeitserleichterung, die ich für sie in Anspruch nehmen darf, wirklich zukomme, und zwar in einem Maße, daß sie mit einer Methode in Wettstreit treten könne, die den großen Vorteil alter Gewohnheit von vornherein für sich hat, kann nicht durch theoretische Erwägungen für und wider entschieden, sondern muß durch die praktische Prüfung festgestellt werden, zu der ich selbst sogleich die ersten Schritte getan habe. Es heißt hier: »Probieren geht über Studieren«.«

Diese Aufforderung stammt aus dem Jahre 1918 und hat u. W. nicht den Widerhall inzwischen gefunden, den man erwarten sollte. Das Wesentliche der Methode *Harzer* ist, daß sie ohne die etwas langwierige Berechnung des Verhältnisses »Sektor zu Dreieck« auskommt. Bezeichnen wir die auf verschiedenen Beobachtungen bezüglichen Größen durch die unteren Indizes α, β, γ und drücken die Zeit t in Einheiten von $\frac{1}{k}$ mittleren Tagen aus, so lauten die Bewegungsgleichungen in heliozentrischen, rechtwinkligen Koordinaten der Bahnebene (Striche, Ableitungen nach t).

$$x'' + sx = 0; \quad y'' + sy = 0; \quad s = \frac{1}{r^3}.$$

Sind f_α, f_β, f_γ die heliozentrischen Winkel zwischen (r_β, r_γ), (r_γ, r_α) und (r_α, r_β), so sind die doppelten Dreiecksflächen:

$$n_\alpha = r_\beta r_\gamma \sin f_\alpha = x_\beta y_\gamma - x_\gamma y_\beta; \cdots f_\alpha + f_\beta + f_\gamma = 0.$$

Für den Halbparameter p der Bahnellipse finden wir:

$$\sqrt{p} = x_\alpha y_\alpha' - y_\alpha x_\alpha'.$$

[1]) Journal des observateurs Tome XI No. 5, p. 65 ... (Entwicklung der Methode) und Tome XII No. 7, p. 127 (Koeffizienten für 937 Bethgea).
[2]) Astronomische Nachrichten **238**.7.

Endlich setzen wir für die Zwischenzeiten:

$$\tau_\alpha = t_\gamma - t_\beta; \quad \cdots \quad \tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma = 0.$$

Harzer hat nun bemerkt, daß bei Beschränkung auf die beiden ersten Glieder der aus den Differentialgleichungen folgenden Reihenentwicklung sich der Halbparameter p unter der Form ergibt:

$$\sqrt{p} = \frac{n_\alpha}{\tau_\alpha} \cdot \frac{\nu_\alpha}{\sin \nu_\alpha}.$$

Er hat den glücklichen Gedanken gehabt, $\sqrt{p}$ ganz allgemein in dieser Form anzusetzen und dann für ν_α folgenden Näherungsausdruck gefunden:

$$\nu_\alpha = \tau_\alpha \cdot \sqrt{\frac{s_\beta + s_\gamma}{2} + \frac{\tau_\alpha}{5\tau_\beta\tau_\gamma}(\tau_\alpha s_\alpha + \tau_\beta s_\beta + \tau_\gamma s_\gamma)}; \qquad s_\alpha = \frac{1}{r_\alpha^3}.$$

Das ist die *Harzer*sche Parameterformel. Zur Erleichterung der Rechnung ist $\log \frac{\nu}{\sin \nu}$ für $\log \nu = 8.360$ bis 0.040 in Abständen von 0.001 tabuliert worden[1]).

Dieses Kernstück der Methode findet in folgender Hypothesenrechnung Verwendung:

$$s_\alpha = \frac{1}{r_\alpha^3}; \qquad \nu_\alpha = \tau_\alpha \cdot \sqrt{\frac{s_\beta + s_\gamma}{2} + \frac{\tau_\alpha}{5\tau_\beta\tau_\gamma}(\tau_\alpha s_\alpha + \tau_\beta s_\beta + \tau_\gamma s_\gamma)}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot \frac{\frac{\nu_2}{\sin \nu_2}}{\frac{\nu_1}{\sin \nu_1}}; \qquad \frac{n_3}{n_2} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{\frac{\nu_2}{\sin \nu_2}}{\frac{\nu_3}{\sin \nu_3}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{r_1^2 - a_1^2} = \dfrac{n_2}{n_1}\left(a_{11}\dfrac{n_1}{n_2} + a_{12} + a_{13}\dfrac{n_3}{n_2}\right) \\ \sqrt{r_2^2 - a_2^2} = \left(a_{21}\dfrac{n_1}{n_2} + a_{22} + a_{23}\dfrac{n_3}{n_2}\right) \\ \sqrt{r_3^2 - a_3^2} = \dfrac{n_3}{n_1}\left(a_{31}\dfrac{n_1}{n_2} + a_{32} + a_{33}\dfrac{n_3}{n_2}\right). \end{cases}$$

Die Größen a_i und a_{ke} sind gewisse Konstanten, die in einer vorbereitenden Rechnung zu bestimmen sind. Ihre Berechnung sowie das Verfahren, durch das ein erster Näherungswert r_2 erhalten wird, findet man bei *Harzer*, AN Bd. 195, Nr. 4674.

Nach diesem Hinweis auf den Kern der *Harzer*schen Methode wollen wir uns unserem speziellen Planeten zuwenden, an dem das Verfahren in drei Fällen geprüft werden soll. Die Untersuchungen *Harzer*s zeigen, daß für den Gültigkeitsbereich seiner Formel außer der Exzentrizität die Größe der heliozentrischen Bewegung in der Gesamtbeobachtungszeit und das Verhältnis der Zwischenzeiten maßgebend ist. Diesem Umstand ist bei der Auswahl der Fälle Rechnung zu tragen. Wir wählen darum einmal einen mittelgroßen Beobachtungszeitraum (32 Tage), aber schlecht verteilte Zwischenzeiten, das andere Mal eine lange Gesamtbeobachtungszeit (77 Tage), jedoch eine günstigere Lage des mittleren Ortes. Da ferner in der Praxis eine Beobachtungsdauer von 77 Tagen nur vorkommen wird, falls aus einem kürzeren Bogen näherungsweise eine Bahn bestimmt worden ist, werden wir noch prüfen, ob durch Benutzung solcher vorläufigen Daten die Bahnbestimmung nach *Harzer* beschleunigt werden kann.

Als erstes Beispiel wählen wir die folgenden Daten aus der Beobachtungsreihe vom Herbst 1920, die auf dem Königstuhl gewonnen ist:

Beob.-Zeit 1920 Sept.	17.42310	38.36154	49.37840
$\log X_\odot$ (Ekliptik)	0.000121$_n$	9.983853$_n$	9.951069$_n$
$\log Y_\odot$ (Ekliptik)	8.968973	9.419332$_n$	9.642528
λ Äquinox. 1920.0	351° 18′ 41″.6	347° 39′ 14″.7	347° 6′ 57″.1
β Topozentr. Kgst.	+7 46 3.8	+6 36 58.9	+5 50 54.4

Für diese Daten führen wir die vorbereitenden Rechnungen aus und erhalten:

	$\log \bar{r}$ 0.268		
$\log \Delta_i$	9.913	9.961	0.000
$\log r_i$	0.260	0.269	0.274

Die Näherungswerte $\log \Delta_i$ erlauben es uns, Lichtzeit und Parallaxe zu berechnen und die Sonnenbreiten zu berücksichtigen. Die endgültigen Daten lauten dann:

Beob.-Z. – Lichtzeit 1920 Sept.	17.41837	38.35626	49.37264
λ Äqu. 1920.0, geoz.	351° 18′ 43″.5	347° 39′ 16″.2	347° 7′ 0″.3
β Sonnenbr. berücks.	+7 46 10.8	+6 37 6.1	+5 50 59.4

Mit denselben wiederholen wir die Vorbereitungsrechnung. Dann können wir sofort mit den Hypothesen beginnen, wobei wir von den schon bekannten Näherungswerten $\log r_i$ ausgehen. In vier Schritten erhalten wir nacheinander:

		$\log r_1$	$\log r_2$	$\log r_3$
Hypothese	(1)	0.259616	0.268151	0.273129
	(2)	0.259409	0.267942	0.272931
	(3)	0.259355	0.267902	0.272869
	(4)	0.259349	0.267886	0.272849

Anschließend finden wir folgende Elemente:

937 Bethgea

t		1920 Okt. 8.35626 M. Z. Greenwich
$M(t)$		30°.76677
ω	Äqu. 1920.0	71°.3434
Ω	Äqu. 1920.0	243°.7499
i	Äqu. 1920.0	3°.6963
φ		12°.4873
$\log \mu^0$		9.471057
$\log a$		0.348431

(I)

Heliozentr. Bewegung = 13°.5

$f = -0.31$

Um die Güte dieses Elementensystems zu beurteilen, rechnen wir die sechs Beobachtungen vom Königstuhl nach und erhalten (im Sinne »Beobachtung – Rechnung«) folgende Abweichungen:

t	Sept. 17	Sept. 19	Okt. 8	Okt. 9	Okt. 11	Okt. 19
$\Delta\alpha$	−0^s.08	+0^s.05	−0^s.17	−0^s.09	−0^s.16	−0^s.11
$\Delta\delta$	0″.0	−0″.7	+0″.1	−1″.1	−1″.5	+0″.5

Die unterstrichenen Örter haben zur Bahnbestimmung gedient.

[1]) Publikation der Sternwarte in Kiel XI: *Paul Harzer*: Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen. Auszug aus diesen Tafeln für $\log \nu = 8.800$ bis 9.700, AN Bd. 195, Nr. 4674.

Die Übereinstimmung ist für eine erste Bahnbestimmung recht befriedigend. Dies ist bemerkenswert, weil die Zwischenzeiten sehr ungleich gewesen sind. Für die von *Harzer* eingeführte Größe

$$f_2 = \frac{(t_2 - t_1) - (t_3 - t_2)}{t_1 - t_3}$$

ergibt sich $f_2 = \frac{21 - 11}{-32} = -0.31$, wie bei den Elementen schon angegeben. *Harzer* wollte seine Methode zunächst nur angewandt wissen, falls

$$|f_2| < 0.1$$

wäre. Diese Grenze wird in unserem Beispiel ganz erheblich überschritten. Der Fall liegt also recht ungünstig; um so bemerkenswerter ist der gute Erfolg.

Die heliozentrische Bewegung dagegen hat nur 13°.5 betragen, während *Harzer* unter Umständen Bogen bis zu 25° als zulässig betrachtet. Wir wollen daher für unser zweites Beispiel die Beobachtungen so wählen, daß die heliozentrische Bewegung voraussichtlich groß wird. Das ist auch darum angebracht, weil die bis in den Dezember 1920 reichenden späteren Beobachtungen aus Wien durch das Elementensystem (I) nicht mehr befriedigend dargestellt werden. Wir gehen von folgenden Daten aus:

Beob.-Zeit 1920 Sept.	17.35745	58.34388	94.27943
$\log X_\odot$ (Ekliptik)	0.000083n	9.909769n	9.499236n
$\log Y_\odot$ (Ekliptik)	8.974171	9.756699n	9.970134n
Beob.-Zeit − Lichtzeit:			
1920 Sept.	17.35273	58.33766	94.27083
λ Äqu. 1920.0 geoz.	351° 19′ 34″.7	347° 30′ 5″.6	355° 7′ 14″.1
β Sonnenbr. berücks.	+7 46 17.2	+5 13 26.4	+3 7 38.1

Nach Erledigung der vorbereitenden Rechnung ergaben sich für die heliozentrischen Entfernungen Schritt für Schritt die Werte:

Vorbereitung		$\log \bar{r}$ 0.276856		
		$\log r_1$	$\log r_2$	$\log r_3$
		0.256121	0.276892	0.295439
Hypothese	(1)	0.259712	0.277450	0.295830
	(2)	0.259361	0.277599	0.296052
	(3)	0.259394	0.277609	0.296094
	(4)	0.259399	0.277614	0.296101

Es ist zu beachten, daß wir auch bei der langen Zwischenzeit von 77 Tagen in 4 Hypothesen zum Ziel kommen, ohne jede Vorkenntnis über die mittlere heliozentrische Entfernung. Aus vielfacher Erfahrung ist bekannt, daß es bei der *Gauß-Encke*schen Methode von Vorteil ist, wenn man im Falle einer großen Beobachtungsdauer von den Näherungswerten für die Dreiecksverhältnisse Gebrauch macht, die man aus einem immer vorhandenen näherungsweisen Elementensystem gewinnen kann. Ehe wir daher zur Elementenbestimmung schreiten, wollen wir versuchen, ob der gleiche Vorteil bei der Methode *Harzer* auch eintritt. Zur Prüfung dieser Frage benutzen wir die gleichen Beobachtungen und bestimmen aus dem System (I) Näherungswerte von $\log r_i$; mit diesen beginnen wir die Hypothesenrechnung mit folgendem Ergebnis:

		$\log r_1$	$\log r_2$	$\log r_3$
Nach (I)		0.259322	0.277079	0.295252
Hypothese	(1)	0.259274	0.277495	0.295926
	(2)	0.259369	0.277586	0.296057
	(3)	0.259394	0.277609	0.296093
	(4)	0.259399	0.277614	0.296101

Auch jetzt sind 4 Hypothesen notwendig. Eine Ersparnis tritt also nicht ein. Die vierte Hypothese ergibt in beiden Fällen übereinstimmende Resultate. Die anschließende Elementenbestimmung liefert:

937 Bethgea

t		1920 Okt. 28.33766 M. Z. Greenwich
$M(t)$		37°.2810
ω	Äqu. 1920.0	70°.1845
Ω	Äqu. 1920.0	243°.8517
i	Äqu. 1920.0	3°.6944
φ		12°.6046
$\log \mu^0$		9.470873
$\log a$		0.348554

(II)

Heliozentr. Bewegung = 30°.9

$f = -0.065$

Mit diesen Elementen werden zunächst die zur Beobachtung benutzten Örter nachgerechnet. Im Sinne Beobachtung minus Rechnung ergeben sich die Abweichungen:

	Sept. 17	Okt. 28	Dez. 3
$\Delta\alpha$	−0s.16	+0s.02	+0s.09
$\Delta\delta$	−1″.4	+0″.1	−0″.1

Im übrigen wollen wir die Beobachtungen in Gruppen zusammenfassen, aus denen wir für die spätere Bahnverbesserung die Normalorte (1) und (2) bilden.

1920	$\Delta\alpha$		$\Delta\delta$	
Sept.	+	−	+	−
17.36		0s.16		1″.4
17.42		0.04	2″.1	
18.43		0.27	3.0	
19.46	0s.14		2.4	
22.38	0.11		3.5	
95.05	0.25	0.47	11.0	1.4
19.01		−0s.04	+1″.9	

Normalort (1) Äqu. 1920.0

19.0 $23^h14^m38^s.78$ +3° 30′ 8″.9

Isolierter Ort (3)

Äqu. 1920.0 Dez. 3

t_B − Ab. 1920 Sept. 94.27080

$23^h37^m7^s.83$ +0° 55′ 54″.8

1920	$\Delta\alpha$		$\Delta\delta$	
Sept.	+	−	+	−
38.36	0s.04		6″.7	
39.34	0.03		5.3	
40.37	0.07		3.8	
41.36	0.00		4.5	
42.33	0.13		4.2	
44.35	0.06		1.4	
46.33	0.11		2.4	
49.37	0.03		2.8	
341.81	0.47		31.3	
42.73	+0s.06		+3″.9	

= Okt. 12.7

Normalort (2) Äqu. 1920.0

42.5 $23^h3^m30^s.80$ +0° 49′ 35″.7

= Okt. 12.5

Überschauen wir diese Übersichten, die 14 von 21 Beobachtungen umfassen, so sehen wir, daß die Elemente II zwar durchaus verbesserungsfähig sind, da die Abweichungen [insbesondere der Ort (2)] nicht zufällig, sondern deutlich systematisch verteilt sind. Andererseits sind die Differenzen absolut nicht sehr bedeutend, sodaß die Übereinstimmung für eine erste Bahnbestimmung aus einer Beobachtungszeit

von 77 Tagen befriedigend genannt werden muß. Das Resultat ist bemerkenswert, da die heliozentrische Bewegung von 30°.9 erheblich über der ursprünglich von *Harzer* zugelassenen Höchstgrenze von 25° liegt. Auch die Exzentrizität ist in unserem Beispiel überdurchschnittlich.

Die Proben mit der Methode *Harzer* haben also befriedigt. Zu einer genaueren Würdigung ist allerdings zu prüfen, inwiefern die gewählten Beispiele typisch sind, und ob nicht unter anderen Umständen weniger günstige Resultate zu erwarten sind. Eine erste Bahnbestimmung ist eine Aufgabe der Praxis. Für den Rechner kommt es in erster Linie darauf an, daß er seine Rechnung möglichst fortlaufend kontrollieren kann, und daß sich der zu erwartende Arbeitsaufwand und die erzielbare Genauigkeit unter allen Umständen innerhalb gewisser, angebbarer Grenzen halten.

Für die Größen der Vorbereitungsrechnung hat *Harzer* verschiedene Kontrollen angegeben, die leicht zu handhaben sind. Die Hypothesen kontrollieren sich gegenseitig. Dazu kommen die Bedingungen der Ebene. In Hinsicht der Kontrollen steht *Harzer*s Methode der *Gauß*schen nicht nach.

Der Arbeitsaufwand ist schwerer zu beurteilen. Wir wollen zunächst, um einen Vergleichsmaßstab zu erhalten, unsere Beispiele nach der gebräuchlichsten Methode, der von *Gauß-Encke*, berechnen, die auch *Harzer* zum gleichen Zweck heranzieht. Bei dem ersten Beispiel (heliozentrische Bewegung 13°.5) kommen wir mit zwei *Gauß*schen Hypothesen aus und erhalten für die entscheidenden Größen, die Verhältnisse der Dreieckflächen, fast die gleichen Werte wie bei der Methode *Harzer*, nämlich:

	Gauß-Encke	*Harzer*
$\log \frac{n_1}{n_2}$	9.540601_n	9.540600_n
$\log \frac{n_3}{n_2}$	9.818374_n	9.818374_n

Harzer dagegen hat bei seinen beiden Beispielen drei *Gauß*sche Hypothesen benötigt und daraus den Schluß gezogen, daß seine Methode erheblich schneller zum Ziel führt. Das ist unzweifelhaft, wenn wirklich drei *Gauß*sche Hypothesen unerläßlich sind; in unserem Beispiel haben wir aber nur zwei nötig. Die dann noch zugunsten der *Harzer*schen Methode verbleibende Arbeitsersparnis ist nicht sehr bedeutend.

Das zweite Beispiel gewährt ein etwas verändertes Bild. Der heliozentrische Bogen beträgt 30°.9. Versuchen wir ohne Vorkenntnisse nach *Gauß-Encke* eine Bahnbestimmung vorzunehmen, so kommen wir mit zwei Hypothesen nicht aus, während der Fall nach der Methode *Harzer* keine besonderen Schwierigkeiten bietet.

Es liegt somit ein Beispiel vor, in dem die *Harzer*sche Methode wirklich erheblich schneller zum Ziele führt. Allerdings darf man diesen Fall nicht überschätzen. Denn eine Beobachtungsreihe von 77 Tagen wird in der Praxis nur dann möglich sein, wenn zur Verfolgung des Planeten aus einer kürzeren Reihe eine provisorische Bahn gerechnet ist. Dieser kann man die Verhältnisse »Sektor: Dreieck« mit ziemlicher Genauigkeit entnehmen. Wir haben die aus dem ersten Beispiel erhaltene Bahn dazu benutzt. Es ergibt sich dann, daß eine einzige *Gauß*sche Hypothese bei Verwendung dieser Näherungswerte zum Ziel führt. Wieder stimmen die Werte der Dreiecksverhältnisse nach beiden Methoden nahezu überein:

	Gauß-Encke	*Harzer*
$\log \frac{n_1}{n_2}$	9.684575_n	9.684577_n
$\log \frac{n_3}{n_2}$	9.739876_n	9.739875_n

Wenn auch die zweimalige Berechnung der Verhältnisse »Sektor zu Dreieck« bei einem Winkel von 30°.9 Grad eine gewisse Mühe macht, so kann es trotzdem kaum zweifelhaft sein, daß in dem betrachteten Fall die *Gauß-Encke*sche Methode überlegen ist. Denn bei der *Harzer*schen Methode hatte sich durch die Benutzung von Näherungswerten keine Arbeitsersparnis ergeben, während für das Verfahren *Gauß-Encke* eine solche, wie in unserem Falle, in der Regel einzutreten pflegt.

Somit hat sich ergeben, daß in vielen Fällen die *Harzer*sche Methode keine oder nur eine unwesentliche Arbeitsersparnis mit sich bringen dürfte, daß andererseits aber auch Fälle möglich sind, bei denen die Ersparnis recht bedeutend wird. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob auch Beispiele denkbar sind, in denen das *Harzer*sche Verfahren zu erheblicher Mehrarbeit führt. Dies könnte nur eintreten, wenn die *Harzer*schen Hypothesen zu langsam konvergierten und durch ihre Anzahl den Vorteil der Kürze der einzelnen Schritte aufwiegen. Wir haben in allen drei Fällen vier Hypothesen gebraucht. Mit dieser Zahl wird man stets ausreichen, da sie genügt, um nach der Regula falsi für zwei Unbekannte[1]) die Größen $\log \frac{n_1}{n_2}$ und $\log \frac{n_3}{n_2}$ im Falle ungenügender Konvergenz in kurzer Interpolationsrechnung zu bestimmen. Diese kleine Mehrarbeit wird selten nötig werden, jedenfalls nur dann, wenn drei *Gauß*sche Hypothesen gerechnet werden müßten. In einem solchen Falle bliebe aber die Methode *Harzer* immer noch erheblich im Vorteil.

Das Ergebnis dieser Untersuchungen über den Arbeitsaufwand können wir dahin zusammenfassen, daß die Methode *Harzer* gegenüber dem Verfahren von *Gauß-Encke* wohl niemals eine nennenswerte Mehrarbeit verursachen wird. Es gibt aber, allerdings nicht allzu häufige Fälle, wo eine erhebliche Arbeitsersparnis eintritt. Bei ersten Bahnbestimmungen, die zwei *Gauß*sche Hypothesen erfordern, dürfte die *Harzer*sche Methode nur einen geringen Vorteil bieten.

Das Urteil von Herrn Geheimrat *Harzer* selber erscheint günstiger. Das liegt daran, daß er über zwei Beispiele berichtet, bei denen er drei *Gauß*sche Hypothesen benötigt. Auch nach unserer Ansicht bewirkt die *Harzer*sche Methode in solchen Fällen eine erhebliche Arbeitsersparnis, aber dieses Vorkommnis ist nicht die Regel, sondern eine Ausnahme. Als Maßstab benutzt *Harzer* die bei seiner bzw. der

[1]) *Bauschinger*, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, 2. Aufl., S. 313-14.

*Gauß*schen Methode hingeschriebenen Ziffern. Er findet die Verhältniszahlen 9 : 16 und 8 : 15, die ja überraschend günstig sind. Wäre er mit zwei *Gauß*-Hypothesen ausgekommen, so würden sich diese Quotienten vermutlich auf 3 : 4 bzw. 7 : 10 erhöhen[1]). Zur Erzielung dieses Verhältnisses ist aber ein geschicktes, ziffernsparendes Rechnen notwendig. Bei Auswertung der verschiedenen Determinanten in der Vorbereitungsrechnung und bei der Elementenbestimmung habe ich mehr Ziffern gebraucht als *Harzer*, sodaß der Vorsprung der *Harzer*schen Methode nicht mehr so augenfällig ist. Immerhin scheint es so, als ob ein geschickter, an die Methode gewohnter Rechner auch in den Fällen bei Verwendung des *Harzer*schen Verfahrens 25–30 % Ziffern sparen kann, in denen nur zwei *Gauß*-Hypothesen benötigt werden. In bezug auf den Arbeitsaufwand wird man jedenfalls nie unliebsame Überraschungen erleben, unter Umständen sogar erheblich günstiger fahren. Wenn die erzielbare Genauigkeit allen Ansprüchen genügt, was noch zu prüfen bleibt, kann durchaus geraten werden, die *Harzer*sche Methode in größerem Umfange, als bisher, zu verwenden.

Mit der Frage der Genauigkeit seiner grundlegenden Parameterformel hat sich *Harzer* selbst ausführlich in den drei früher genannten Arbeiten beschäftigt. Insbesondere hat er in der letzten von ihnen (AN Bd. 208, Nr. 4979) die Formel noch durch gewisse Zusatzglieder erweitert, um auch extremen Fällen zu genügen. Die Anbringung der Korrekturen erfordert aber die Kenntnis der wahren Anomalien. Es ist darum nötig, zunächst die Rechnung mit der einfachen Parameterformel fast zu Ende zu führen. Darauf sind die recht komplizierten Zusatzglieder zu berechnen, und die Hypothesenrechnung muß schließlich noch einmal aufgenommen werden. Das ist ein Verfahren, das wenig locken kann. Wenn die nach Benutzung der einfachen Parameterformel auftretenden Abweichungen »Beobachtung – Rechnung« nicht allzu groß sind, wird man in der Regel vorteilhafter unter Benutzung aller Beobachtungen eine Bahnverbesserung nach der Variation der geozentrischen Distanzen vornehmen, als gestützt auf nur drei Beobachtungen die erweiterte *Harzer*sche Formel zur Anwendung zu bringen. Diesen Weg haben wir hier beschritten. Die erweiterte Parameterformel lassen wir ganz aus dem Spiel und wollen nun im engen Anschluß an *Harzer* die mit der einfachen Parameterformel erzielbare Genauigkeit prüfen.

Harzer hat in seiner Arbeit von 1901 umfangreiche Reihen aufgestellt, die er in seinem Aufsatz von 1913 dazu verwendet, die Grenzen der Anwendbarkeit seiner Formel zu ermitteln. Es findet sich dort eine Tabelle, die für die wahre Anomalie $w_2 = \frac{k\pi}{12}$, die Exzentrizitäten $e = 0.1,\ 0.2,\ 0.3$ und die Größen $f = \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2} = 0.00,\ \pm 0.05$ und ± 0.10 jeweils die höchste heliozentrische Bewegung angibt, bis zu der die einfache Parameterformel höchstens einen Fehler von einer Einheit der sechsten Dezimalen ergibt. In unserem ersten Beispiel beträgt nun $f = -0.31$. Es wäre wünschenswert zu wissen, wie es mit der Genauigkeit bei einer derartigen Verteilung der Zwischenzeiten steht. Am nächsten scheint es zu liegen, die *Harzer*sche Tabelle auf größere Werte von $|f_2|$ auszudehnen. Dazu ist aber die mühselige Benutzung der erwähnten Reihen notwendig. Zudem sagt die Tabelle gar nichts darüber, wie hoch der Fehler ist, wenn die tatsächliche heliozentrische Bewegung die vorgeschriebene Höchstgrenze überschreitet, eine Frage, die doch von großem Interesse ist.

Der Zweck der nachfolgenden Untersuchung ist es, ein leicht zu handhabendes Kriterium dafür zu gewinnen, ob die mit der einfachen Parameterformel erzielbare Genauigkeit ausreichen wird. Das Kriterium erfüllt nur dann seinen Zweck, wenn es angewendet werden kann, sobald die erste Abschätzung der heliozentrischen Entfernung vorliegt. Denn der Rechner will vor Beginn der Hauptrechnung wissen, ob die Arbeit, die er vorhat, überhaupt zu brauchbaren Resultaten führen kann; sonst würde er natürlich einen anderen Weg einschlagen, z. B. die *Gauß-Encke*sche Methode wählen. Ein solches Kriterium muß notwendig recht roh sein. Denn bei Beginn der Rechnung kennen wir nur angenähert die heliozentrische Distanz und den heliozentrischen Bogen. Über die Exzentrizität und vor allem über die wahre Anomalie wissen wir gar nichts. Beide Größen benutzt aber *Harzer* als unterscheidendes Merkmal bei der Beurteilung der Genauigkeit seiner Parameterformel, wie wir schon erwähnt haben. Auch wir werden an sich darauf geführt werden. Bei einer ganz unbekannten Bahn kann man für die Exzentrizität in erster Näherung den Durchschnittswert einsetzen, den dieses Element unter Berücksichtigung aller bekannten Planeten besitzt, den Einfluß der wahren Anomalie können wir dagegen nur durch Majorisierung ausschalten. Damit wird das Kriterium allerdings vergröbert, aber dieser Schritt ist nicht zu umgehen. Demgegenüber fällt es weniger ins Gewicht, daß im folgenden die Reihenentwicklungen früh abgebrochen werden, um ein einfaches Resultat zu erzielen.

Es sei ausdrücklich betont, daß das Kriterium nur dazu da ist, vor Beginn der Rechnung einer rohe Aussage über die zu erwartende Genauigkeit zu geben. In Grenzfällen kann die Methode versagen. Nach Durchführung der Rechnung steht e und w_2 zur Verfügung, und es kann $\log \sqrt{p}$ mittels der erweiterten Parameterformel mit hoher Sicherheit bestimmt werden, sodaß sich dann exakt sagen läßt, zu welchem Fehler die einfache Formel etwa geführt hat. Am bequemsten kontrolliert man aber das Elementensystem an den Beobachtungen.

Zur Ableitung unseres Kriteriums wollen wir den folgenden Weg einschlagen. Aus *Harzer*s Tabelle entnehmen wir, ob im Falle von $f = 0.00$ eine bestimmte heliozentrische Bewegung hb_2 noch einen exakten Wert von $\sqrt{p}$ ergibt. Wir halten die Randorte, also hb_2, fest und verändern allmählich den mittleren Ort, wodurch $|f|$ wächst. Wäre die Parameterformel streng richtig, so dürfte $\sqrt{p}$ dabei seinen Wert nicht ändern. In Wirklichkeit ist dies aber der Fall, wenn auch wenig. Wir stellen darum fest, in welchen Abständen

[1]) Dabei ist angenommen, daß eine *Gauß*-Hypothese etwa $^5/_6$ der Ziffern braucht, die zur Vorbereitungsrechnung und Elementenbestimmung der *Gauß*schen Methode zusammen benötigt werden.

$\log\sqrt{p}$ um eine Einheit der sechsten Dezimalen steigt oder fällt und bekommen so einen Überblick über die eventuell zu erwartende Ungenauigkeit.

Für den mittleren Ort lautet *Harzers* Parameterformel:

$$\sqrt{p}=\frac{n_2}{\tau_2}\cdot\frac{\nu_2}{\sin\nu_2} \quad \text{mit}$$

$$\nu_2=\sqrt{\frac{\tau_2^2}{2}(s_1+s_3)+\frac{1}{5}\frac{\tau_2^3}{\tau_1\tau_3}(\tau_1 s_1+\tau_2 s_2+\tau_3 s_3)} \qquad (1)$$

Wir wollen den ersten und dritten Ort festhalten, also

$$s_1,\ s_3,\ n_2,\ \tau_2 = \text{konstant}$$

den mittleren aber im Intervall $t_1 \leqq t_2 \leqq \frac{t_1+t_3}{2}$ variieren. ν_2 und damit $\sqrt{p}$ wird sich dabei allmählich ändern. Den Grad dieser Änderung in Abhängigkeit von der heliozentrischen Bewegung hb_2, der Exzentrizität e (die beide fest gegeben sind) und dem wechselnden Verhältnis der Zwischenzeiten gilt es festzustellen. Wir setzen:

$$\tau_3=\tau \qquad \tau_2 \qquad \tau_1=-(\tau+\tau_2)$$

$$F(\tau)=-\tfrac{1}{5}\frac{\tau_2^3}{\tau(\tau+\tau_2)}[\tau(s_3-s_1)+\tau_2(s_2-s_1)]$$

dann ist

$$\nu_2=\sqrt{\frac{\tau_2^2}{2}(s_1+s_3)+F(\tau)}\,. \qquad (1a)$$

Liegt der zweite Beobachtungszeitpunkt genau in der Mitte der beiden anderen, so ist $\tau=-\frac{\tau_2}{2}$. Den zugehörigen Wert von ν_2 bezeichnen wir mit (ν_2) und erhalten:

$$(\nu_2)_0^2=\frac{\tau_2^2}{2}(s_1+s_3)+F\left(-\frac{\tau_2}{2}\right).$$

Wir schreiben:

$$F(\tau)-F\left(-\frac{\tau_2}{2}\right)=\Delta F(\tau)$$

woraus sich ergibt

$$\nu_2^2=(\nu_2)_0^2+\Delta F(\tau)\,. \qquad (1b)$$

Ehe wir Reihen für $\Delta F(\tau)$ aufstellen, wollen wir prüfen, welchen Wert $\Delta F(\tau)$ annehmen darf, wenn $\log\sqrt{p}$ bzw. $\log\frac{\nu_2}{\sin\nu_2}$ sich höchstens um eine Einheit der n^{ten} Dezimalen ändern soll:

Nach (1b) ist

$$\log^{10}\nu_2=\log^{10}(\nu_2)_0+\frac{M}{2}\cdot\frac{\Delta F(\tau)}{(\nu_2)_0^2}+\cdots$$

wobei $M=0.4342945$ der Modul ist.

Setzen wir andererseits

$$\nu_2=(\nu_2)_0+\Delta\nu_2$$

so folgt

$$\log^{10}\nu_2=\log^{10}(\nu_2)_0+M\frac{\Delta\nu_2}{(\nu_2)_0}+\cdots.$$

Ein Vergleich gibt:

$$\Delta\nu_2=\tfrac{1}{2}\frac{\Delta F(\tau)}{(\nu_2)_0}.$$

ν_2 tritt in $\sqrt{p}$ in der Form $\frac{\nu_2}{\sin\nu_2}$ auf. Diesen Ausdruck entwickeln wir zunächst:

$$\Delta\log^{10}\frac{\nu_2}{\sin\nu_2}=M\Delta\nu_2\left(\frac{(\nu_2)_0}{3}+\frac{(\nu_2)_0^3}{45}+\cdots\right)=$$

$$=M\Delta F(\tau)\left(\tfrac{1}{6}+\frac{(\nu_2)_0^2}{90}+\cdots\right).$$

Der letzte Summand wird in der Regel unbedeutend sein. Es kann daher geschlossen werden:

$$\left|\Delta\log^{10}\frac{\nu_2}{\sin\nu_2}\right|<10^{-n} \quad \text{für} \quad |\Delta F(\tau)|<13\cdot10^{-n}. \qquad (2)$$

Es kommt nun darauf an, $\Delta F(\tau)$ in Beziehung zu setzen zur heliozentrischen Bewegung, der Exzentrizität und den Zwischenzeiten unter Eliminierung der von den speziellen heliozentrischen Entfernungen abhängigen Größen s_i. In

$$F(\tau)=-\tfrac{1}{5}\frac{\tau_2^3}{\tau(\tau+\tau_2)}[\tau(s_3-s_1)+\tau_2(s_2-s_1)]$$

führen wir die Reihen ein:

$$s_2-s_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}s_1^{(n)} \qquad s_3-s_1=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\tau_2^n}{n!}s_1^{(n)}.$$

Mit *Harzer* setzen wir:

$$u_1=e\cos w_1 \qquad v_1=e\sin w_1$$

daraus wegen $\frac{dw_1}{d\tau}=\frac{\sqrt{p}}{r_1^2}$

$$u_1'=-\frac{v_1(1+u_1)^2}{\sqrt{p^3}}; \qquad v_1'=+\frac{u_1(1+u_1)^2}{\sqrt{p^3}}; \qquad s_1=\frac{1}{r_1^3}=\frac{(1+u_1)^3}{p^3}.$$

Durch Ableiten der letzten Formel ergibt sich leicht s_1', s_1'', s_1''', $\cdots$. Wir wollen hier eine erste Einschränkung machen, nämlich nur die in e, d. h. in (u, v) linearen Größen mitnehmen. Ersichtlich erhalten wir dann:

$$s_1^{(2k)}=(-1)^k\cdot\frac{3u_1}{p^3\sqrt{(p^3)^{2k}}}+(e^2);$$

$$s_1^{(2k+1)}=(-1)^{k+1}\cdot\frac{3v_1}{p^3\sqrt{(p^3)^{2k+1}}}+(e^2).$$

Führen wir diese Ableitungen in unsere Reihen ein, so lautet $F(\tau)$, falls wir noch zur Abkürzung

$$\frac{\tau}{\sqrt{p^3}}=T, \qquad \frac{\tau_2}{\sqrt{p^3}}=T_2$$

schreiben:

$$F(\tau)=-\tfrac{3}{5}\frac{T_2^3\,e}{T(T+T_2)}\{\cos w_1[(T+T_2)-(T\cos T_2+T_2\cos T)]+\sin w_1\,[T\sin T_2-T_2\sin T]\}+(e^2)\,.$$

Um den Anschluß an die Darstellung *Harzer*s zu gewinnen, führen wir hier seine Größe f ein, die wir mit f_2 bezeichnen wollen.

$$f_2=\frac{\tau_3-\tau_1}{\tau_2}=\frac{2\tau+\tau_2}{\tau_2}=\frac{2T+T_2}{T}\qquad\text{woraus}\quad T=\frac{T_2}{2}(f_2-1)\quad\text{und}\quad T+T_2=\frac{T_2}{2}(f_2+1)\quad\text{folgt.}$$

$$F(\tau)=-\tfrac{6}{5}\frac{T_2^2 e}{f_2^2-1}\left\{(f_2+1)\cos w_1-(f_2-1)\cos(w_1+T_2)-2\cos\left(w_1-\frac{T_2}{2}(f_2-1)\right)\right\}+(e^2)\,.$$

Hier wird eine zweite Einschränkung nötig; es können nur die in f_2 linearen Glieder berücksichtigt werden. Da nicht $F(\tau)$ selbst, sondern $\Delta F(\tau)=F(\tau)-F\left(-\frac{\tau}{2}\right)$ gebraucht wird, gehen wir jetzt zu dieser Größe über, für die wir finden:

$$\Delta F(\tau)=-\tfrac{1}{40}T_2^5 e f_2(2\sin w_1+T_2\cos w_1)+(e^2,\ e f_2^2,\ e f_2 T_2^7)\,.$$

Der Maximalwert von $|2\sin w_1+T_2\cos w_1|$ ist $\sqrt{4+T_2^2}\sim 2$ im Rahmen unserer Näherung, wenn wir die Faktoren beachten, mit denen dieser Ausdruck multipliziert ist. Also:

$$\Delta F(\tau)=-\tfrac{1}{20}T_2^5 e f_2+(e^2,\ e f_2^2,\ e f_2 T_2^7)\,.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{T_2^5}=\frac{\sqrt{p}^{15}}{\tau_2^5}=\frac{1}{\tau_2^5}\sqrt{r_1^{15}(1+u_1)^{15}}=\left(\frac{1}{\tau_2\sqrt{s_1}}\right)^5\left(1+\frac{15u_1}{2}+(e^2)\right)\,.$$

$\tau_2\sqrt{s_1}$ ist annähernd gleich der gesamten heliozentrischen Bewegung hb_2 in der Beobachtungsperiode. Wir erhalten also:

$$\Delta F(\tau)=-\tfrac{1}{20}(hb_2)^5 e f_2+(e^2,\ e f_2^2,\ e f_2 T_2^7)\,. \qquad (3)$$

Führen wir diesen Ausdruck in (2) ein, so finden wir (3a):

Es ist $\left|\Delta\log^{10}\frac{\nu_2}{\sin\nu_2}\right|<10^{-n}$ solange $|e f_2|<\frac{260\cdot 10^{-n}}{(hb_2)^5}$

bleibt; speziell für $n=6$.

$$|\Delta\log^{10}\sqrt{p}|<10^{-6}\quad\text{für}\quad|e f_2|<\frac{26}{(10hb_2)^5}\,. \qquad (3b)$$

Diese Beziehung werden wir unten tabulieren[1]). Aus ihr ergibt sich, welche Höchstabweichungen bei $\log^{10}\sqrt{p}$ auftreten können, wenn die Zwischenzeiten allmählich ungünstiger werden. Es ist dabei vorausgesetzt worden, daß die Parameterformel für den mittleren Ort benutzt wird. Da bei der Methode *Harzer* zur Auswertung von r_1 und r_3 aber auch die Formeln für die Randörter gebraucht werden, muß kurz auf diese eingegangen werden.

Indem wir (3b) auf die Randörter anwenden, erhalten wir:

$$|\Delta\log^{10}\sqrt{p}|<10^{-6}$$

für $|e f_1|<\frac{26}{(10hb_1)^5}$ bzw. $|e f_3|<\frac{26}{(10hb_3)^5}$.

[1]) Siehe Tabelle II.

Nun findet man leicht:

$$f_1=-\frac{3-f_2}{1+f_2}\qquad f_3=\frac{3+f_2}{1-f_2}$$

$$hb_1\sim\frac{1+f_2}{2}hb_2\qquad hb_3\sim\frac{1-f_2}{2}hb_2\,.$$

Unsere Ungleichheiten lauten also:

$$\left|e\frac{3-f_2}{1+f_2}\right|<\frac{26}{(10hb_2)^5}\cdot\frac{32}{(1+f_2)^5}$$

bzw.
$$\left|e\frac{3+f_2}{1-f_2}\right|<\frac{26}{(10hb_2)^5}\cdot\frac{32}{(1-f_2)^5}\,.$$

Da $|f_2|<1$ ist, so ist $(1\pm f_2)>0$.

Die senkrechten Striche können also wegbleiben und es ist folgende Umformung zulässig:

$$\frac{(3-f_2)(1+f_2)^4}{32}<\frac{1}{e}\cdot\frac{26}{(10hb_2)^5}$$

bzw.
$$\frac{(3+f_2)(1-f_2)^4}{32}<\frac{1}{e}\cdot\frac{26}{(10hb_2)^5}\,. \qquad (4)$$

Die beiden Ungleichheiten gehen durch Vertauschung von $(+f_2)$ und $(-f_2)$ ineinander über. Rechts steht der bei Benutzung des mittleren Ortes zulässige Höchstwert von $|f_2|$, falls e und hb_2 gegeben sind.

Es entsteht die Frage, ob die Beziehungen (4) für jeden Wert f_2 erfüllt sind, für den die Benutzung der Parameterformel für den mittleren Ort höchstens einen Fehler von einer Einheit der sechsten Dezimalen ergibt. Nur dann kann man sich beiBeurteilung der Genauigkeit der *Harzer*schen Methode auf den mittleren Ort beschränken. Wir setzen

$$\psi=\frac{(3-f_2)(1+f_2)^4}{32}$$

und lassen hier f_2 in dem praktisch allein wichtigen Bereich von -0.35 bis $+0.35$ variieren. Diese Funktion haben wir tabuliert.

$$\psi = \frac{(3-f_2)(1+f_2)^4}{32}$$

f_2	$\psi > 0$
+0.35	0.275
.30	0.241
.25	0.210
.20	0.181
.162	0.162
.15	0.156
.10	0.133
+0.05	0.112
0.00	0.094
−0.05	0.078
.071	0.071
.10	0.064
.15	0.051
.20	0.041
.25	0.032
.30	0.025
−0.35	0.019

Unsere Frage lautet nun, ob stets $\psi(f_2) < |f_2|$ (für den 1. Ort) bezw. $\psi(-f_2) < |f_2|$ (für den 3. Ort) ist. Die Tabelle ergibt, daß diese Beziehungen im ersten Falle für $-0.071 < f_2 < +0.162$, im zweiten Falle für $-0.162 < f_2 < +0.071$ nicht erfüllt sind. Fällt f_2 in eines oder beide Intervalle, so ist der bei dem betreffenden Ort zu erwartende Fehler gesondert zu bestimmen. Liegt f_2 außerhalb beider Intervalle, so ist die Ungenauigkeit bei den Randörtern sicher nicht größer als beim mittleren Ort und man kann daher die Untersuchung auf diesen beschränken.

Die Größen $\frac{\psi(f_2)}{|f_2|}$ und $\frac{\psi(-f_2)}{|f_2|}$ geben das ungefähre Verhältnis der Abweichung beim 2. Ort für ein gegebenes f_2 an. Sehr schön läßt sich dies an dem Zahlenmaterial prüfen, das *Harzer* in seinem Aufsatz von 1918 gegeben hat. Er wählt zu seinen Untersuchungen den Planeten 887 Alinda mit der überaus hohen Exzentrizität $e = 0.53$ und verteilt auf seiner Bahn drei Orte so, daß stets $f_2 = +\frac{1}{3}$ und $w_2 = k \cdot \frac{\pi}{4}$ wird. Seine einfache Parameterformel ergibt für die Kombinationen (312), (123), (231), die unter diesen Überschriften mitgeteilten Abweichungen in Einheiten der 7. Dezimalen von dem wahren Wert von $\log^{10} \sqrt{p}$. Das Verhältnis dieser Abweichung ist in den beiden letzten Spalten mitgeteilt. Die Verhältniszahlen schwanken nicht sehr beträchtlich. Als Durchschnitt findet man: 0.788 bzw. 0.063.

Andererseits ergibt sich aus den unter der Tabelle angeschriebenen Werten:

$$\frac{\psi(f_2)}{|f_2|} = 0.789 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\psi(-f_2)}{|f_2|} = 0.063$$

in voller Übereinstimmung mit den oben mitgeteilten Durchschnittswerten.

887 Alinda: $e = 0.53$; $p = 1.81$; $f_2 = \frac{1}{3}$.

w_2	Einfache Parameterformel 312	123	231	hel. Bew.	$\frac{312}{123}$	$\frac{231}{123}$
0°	+114	+142	+ 10	42°	0.803	0.070
45	+440	+552	− 41	34	0.797	0.074
90	− 73	− 94	+ 5	18	0.777	0.053
270	+ 78	+ 98	− 7	19	0.796	0.072
315	−550	−715	+ 34	35	0.769	0.048
				Σ	3.942	0.317
				$\frac{1}{5}\Sigma$	0.788	0.063

Es ist $\psi(\frac{1}{3}) = 0.263$, $\psi(-\frac{1}{3}) = 0.021$.

Also $\frac{\psi(f_2)}{|f_2|} = 0.789$, $\frac{\psi(-f_2)}{|f_2|} = 0.063$.

Hiermit dürfte die Frage geklärt sein, welche Ungenauigkeiten bei den Randorten zu erwarten sind, sobald wir wissen, eine wie große Abweichung sich bei Benutzung der *Harzer*schen einfachen Parameterformel für den mittleren Ort ergibt.

In seiner Arbeit von 1913 hat *Harzer* eine Tabelle mitgeteilt, der u. a. zu entnehmen ist, bis zu welcher heliozentrischen Bewegung $hb_2 \log^{10} \sqrt{p}$ durch seine Formel für den mittleren Ort bis auf einen Fehler von 1×10^{-6} dargestellt wird, falls e und w_2 bekannt und $f_2 = 0.00$ ist. Diese Tabelle ist unsere Tabelle I.

Ändern wir nun f_2 ab, so ändert sich allmählich $\log^{10} \sqrt{p}$. Die Tabelle II läßt erkennen, wie groß $|f_2|$ höchstens werden darf, ehe $\log^{10} \sqrt{p}$ um eine Einheit der sechsten Dezimalen steigt. Ist allgemeiner $|f_2| = k \cdot |f_2|_{\max.}$, so hat sich $\log^{10} \sqrt{p}$ gegenüber seinem Wert bei $f_2 = 0.00$ um höchstens k-Einheiten der 6. Dezimalen geändert. Die Tabelle beruht auf Formel (3b); sie kann auch für $(hb_1; f_1)$ und $(hb_3; f_3)$ benutzt werden.

Tabelle I.

*Harzer*s einfache Parameterformel gibt für $f_2 = 0.00$ bei den angegebenen Werten von w_2 und e bis zur heliozentrischen Bewegung hb_1 die Größe $\log^{10} \sqrt{p}$ mit einem Fehler, der höchstens eine Einheit der sechsten Dezimale beträgt.

$\pm w_2$	hb_2 bei $f_2 = 0.00$ $e = 0.1$	$e = 0.2$	$e = 0.3$
0°	25°13	22°61	21°35
15	25.34	22.82	21.54
30	26.02	23.54	22.24
45	27.45	25.28	24.21
60	30.66	31.43	50.31
75	50.51	27.68	23.18
90	31.39	23.81	20.58
105	27.27	22.28	19.42
120	25.92	21.59	18.96
135	25.22	21.40	19.00
150	24.87	21.50	19.41
165	24.72	21.70	19.95
180	24.68	21.80	20.22

Tabelle II.

Es ist $|\log^{10} \sqrt{p}| < 10^{-6}$ für $|f| < \frac{1}{e} \cdot \frac{26}{(10\,hb)^5}$.

$|f|_{\max.}$ ist für verschiedene hb und e tabuliert.

hb \ e		$\lvert f \rvert_{\max.}$ 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	$\lvert ef \rvert_{\max.}$
0.15	9°4	34.24	17.12	11.41	8.56	6.85	3.424
0.18	11.3	13.76	6.88	4.59	3.44	2.75	1.376
0.21	13.2	6.36	3.18	2.12	1.59	1.27	0.636
0.24	15.1	3.27	1.64	1.09	0.82	0.65	0.327
0.27	17.0	1.81	0.91	0.60	0.45	0.36	0.181
0.30	18.9	1.07	0.54	0.36	0.27	0.21	0.107
0.33	20.8	0.664	0.332	0.221	0.166	0.133	0.0664
0.36	22.7	0.430	0.215	0.143	0.108	0.086	0.0430
0.39	24.5	0.288	0.144	0.096	0.072	0.058	0.0288
0.42	26.4	0.199	0.100	0.066	0.050	0.040	0.0199
0.45	28.3	0.141	0.071	0.047	0.035	0.028	0.0141
0.48	30.2	0.102	0.051	0.034	0.026	0.020	0.0102
0.51	32.1	0.075	0.038	0.025	0.019	0.015	0.0075
0.54	33.9	0.057	0.029	0.019	0.014	0.011	0.0057
0.57	35.8	0.043	0.022	0.014	0.011	0.008	0.0043
0.60	37.7	0.033	0.017	0.011	0.008	0.007	0.0033
0.63	39.6	0.028	0.014	0.009	0.007	0.006	0.0028

Die Brauchbarkeit dieser Tafeln prüfen wir sogleich an unseren Beispielen. Im ersten Fall wird für die erste Näherung

$$-\tau_2\sqrt{s_2}=0.217\sim hb_2\,.$$

Über die Exzentrizität wissen wir nichts und setzen daher den Durchschnittswert $e=0.15$ ein[1]). Nach Tabelle II erhält man für $hb_2=0.217$ und $e=0.15$ als zulässige Höchstgrenze $|f_2|_{max.}=4.23$, also eine Ziffer weit über dem tatsächlichen Wert 0.31. Somit wird die Parameterformel einen gleichguten Wert liefern, wie für $f_2=0.00$. Aus Tabelle I erkennen wir, daß für beliebiges w_2 bei $hb_2=0.217=13\overset{\circ}{.}6$ $\log^{10}\sqrt{p}$ bis auf eine Einheit der sechsten Dezimalen genau ausfallen muß. Daß ferner bei den Randörtern keine größeren Ungenauigkeiten auftreten, dafür bürgt die Ungleichung $|f_2|>0.162$. Die tatsächlichen Werte für diese lauteten bei Durchführung der Rechnung:

$$\log\sqrt{p}=0.163818,\ 0.163819,\ 0.163820.$$

Die geringen Abweichungen rühren wohl von wiederholten Interpolationen her. Denn die vorhergehende Schlußweise wäre nicht beeinträchtigt worden, wenn für diese der wahre Wert $e=0.22$ gewählt worden wäre. Es hätte sich $|f_2|_{max.}=2.74$ ergeben, ein Wert, der auch noch weit über 0.31 liegt.

Etwas komplizierter liegt der zweite Fall. Hier haben wir

$$-\tau_2\sqrt{s_2}=0.509\sim hb_2,\ \cdot\ \bar{e}=0.15.$$

Nach Tabelle I finden wir für diese Werte

$$|f_2|_{max.}=0.057\,.$$

Es ist aber bei unserem Beispiel $|f_2|=0.065$, also etwas höher. Daher kann die Parameterformel unter Umständen für $\log\sqrt{p}$ einen Wert liefern, der um ein bis zwei Einheiten der sechsten Dezimalen von dem abweicht, der sich bei $f=0.00$ und gleichem heliozentrischen Bogen ergeben hätte. Andererseits erkennen wir aus Tabelle I, daß bei $hb_2=0.509=32\overset{\circ}{.}0$ der Fehler bei $\log\sqrt{p}$ nur dann kleiner als 1×10^{-6} ist, falls $|w_2|$ zwischen 60° und 75° liegt. Wie groß der Fehler sonst wird, darüber läßt sich aus I unmittelbar nichts schließen; es wird nötig sein, darüber Erfahrungen zu sammeln. Wie ja früher ausführlich dargelegt, ist das Ergebnis in unserem Fall sehr erfreulich, was allerdings damit zusammenhängt, daß die tatsächliche Größe $w_2=56\overset{\circ}{.}2$ nahe an dem oben bezeichneten Intervall liegt. Weiter ist zu beachten, daß der wirkliche Wert $f_2=0.065$ in das kritische Intervall

$$-0.071<f_2<+0.162$$

fällt. Somit beträgt wegen

$$\frac{\psi(f_2)}{|f_2|}=1.1\qquad\frac{\psi(-f_2)}{|f_2|}=1.8$$

der wahrscheinliche Fehler für den 1. Ort das 1.1fache, für den 3. Ort das 1.8fache des Fehlers, der für den mittleren Ort bei $\log\sqrt{p}$ auftritt. Dem mittleren Wert kommt daher ein größeres Gewicht zu. Bei unserer Rechnung haben wir gefunden:

$$\log^{10}\sqrt{p}=0.163680,\ 0.163683,\ 0.163683\,.$$

Die geringe Abweichung von drei Einheiten findet im Vorstehenden ihre Erklärung, soweit sie nicht durch Interpolationen verursacht ist. Es sei betont, daß unsere Schlüsse keine wesentliche Änderung erfahren. Wenn wir den wahren Wert $e=0.22$ (statt $\bar{e}=0.15$) benutzen können, wie es im dritten Beispiel mit dem bekannten provisorischen Elementensystem möglich ist. Nur die Kenntnis von $w_2=56\overset{\circ}{.}2$ wirkt beruhigend.

Wie schon die erhaltenen Differenzen »Beobachtung minus Rechnung« in (α, δ), so zeigt auch die hier vorgenommene Analyse der Werte $\log\sqrt{p}$, daß in unseren Beispielen die *Harzer*sche Methode für eine erste Bahnbestimmung ausreichend zuverlässige Elemente geliefert hat. Es bleibt aber noch festzustellen, ob in der Praxis häufiger vorkommende Fälle denkbar sind, bei denen ein solches Resultat nicht zu erwarten ist. Die erzielbare Genauigkeit hängt von drei Faktoren ab: der heliozentrischen Bewegung, dem Verhältnis der Zwischenzeiten und der Exzentrizität[2]). Von diesen ist der zweite von vornherein bekannt, der erste kann durch $(-\tau_2\sqrt{s_2})$ geschätzt werden, wenn eine Kreisbahn vorliegt oder sonst nach der ersten Näherung; unbekannt bis zum Schluß bleibt dagegen der dritte. Für sämtliche kleine Planeten liegt der Durchschnitt der Exzentrizitätswinkel[1]) bei $\varphi=8\overset{\circ}{.}7$ oder $e=0.15$. Man wird darum gut tun, die *Harzer*sche Methode nur dann zu verwenden, wenn der vorliegende Wert von f_2 die durch

$$|0.15\,f_2|\leq\frac{26}{(-10\tau_2\sqrt{s_2})^5}$$

gegebene Schranke nicht allzu stark überschreitet. Eine volle Sicherheit wird dadurch aber keinesfalls gegeben. Denn große heliozentrische Bögen sind in erster Linie bei Planeten mit großer mittlerer Bewegung zu erwarten und diese weisen in der Regel eine weit überdurchschnittliche Exzentrizität auf. Sehr deutlich zeigt dies ein Diagramm von *Stracke*[3]), in dem durchschnittliche mittlere Bewegung und durchschnittliche Exzentrizität in Beziehung gesetzt sind. Es geht aber auch aus folgender Aufstellung von Planeten hervor, deren erste Beobachtungsreihen große heliozentrische Bögen umfassen:

Bezeichnung	μ	φ	hel. Bew.	Beobachtungszeitraum
1009, 1923 PE	832″	27°	69°	1923 Nov. 10–1924 Febr. 25
1034, 1924 SS	1022	15	>25	1924 Sept. 8– Nov. 30
1036, Ganymed	815	33	>25	1924 Okt. 23–1925 April 14
1077, 1926 TK	958	11	34	1926 Okt. 6–1927 Jan. 6
1080, 1927 QB	941	15	33	1927 Aug. 30– Nov. 28
1083, 1928 BC	998	10	31	1928 Jan. 29– April 22
1088, 1927 WA	1087	11	26	1927 Nov. 17–1928 Jan. 22
1090, 1928 DG	1016	13	25	1928 Febr. 20– April 21

Das sind acht Planeten aus einem Zeitraum von $4\frac{1}{2}$ Jahren, deren heliozentrische Bewegung während der Beobachtungen der Entdeckungsopposition mehr als 25° beträgt und deren

[1]) *Stracke, G.*: Die kleinen Planeten, in Ergebnissen der exakt. Naturwiss., Bd. IV, S. 15, Berlin 1925.

[2]) Als vierter Faktor tritt die wahre Anomalie hinzu; sie kommt in unserem Kriterium aber nicht mehr vor, da wir sie durch Majorisierung ausgeschaltet haben.

[3]) A. a. O. S. 16.

Exzentrizität weit überdurchschnittlich ist. Mindestens für die drei ersten Planeten der Tabelle würde die *Harzer*sche Methode nur zu recht unsicheren Resultaten führen, wenn man die Gesamtbeobachtungszeit zur Bahnbestimmung heranziehen wollte oder müßte. Es kommen also durchaus Fälle vor, bei denen die mit der einfachen *Harzer*schen Methode erzielbare Genauigkeit strengen Anforderungen nicht mehr genügt. Jedoch werden dies stets Fälle sein, bei denen wegen der großen heliozentrischen Bewegung auch bei der *Gauß-Encke*schen Methode eine Zusatzhypothese nötig wird. Unter diesen, immerhin seltenen Umständen dürfte sich die Benutzung der erweiterten *Harzer*schen Parameterformel lohnen, bei der die unvorhergesehen nicht zum befriedigenden Ziel führenden Bahnbestimmungen nach der einfachen *Harzer*schen Methode verwandt und doch noch zum erfolgreichen Abschluß gebracht werden können. Von diesen Sonderfällen abgesehen, wird für die Zwecke einer ersten Bahnbestimmung die einfache *Harzer*sche Parameterformel keiner Verbesserung bedürfen und sie bietet dann einen vollen Ersatz für das schwerer zu erlangende *Gauß*ische η.

2. Verbesserung des Elementensystems (II).

a) Darstellung der Beobachtungsreihe 1920.

Mit Hilfe der Darstellung durch das Elementensystem (II) ist es uns möglich gewesen, 14 von insgesamt 21 Beobachtungen aus dem Herbst 1920 zur Bildung von Normalörtern heranzuziehen:

	M. Z. Greenwich	α	δ
1. Normalort	1920 Sept. 19.0	$23^h14^m38^s.78$	$+3°30'\ 8''.9$
2. Normalort	1920 Sept. 42.5	$23\ 3\ 30.80$	$+0\ 49\ 35.7$
3. (isolierter) Ort	1920 Sept. 94.27080	$23\ 37\ 7.83$	$+0\ 55\ 54.8$

Diese Örter sind geozentrisch und auf Äqu. 1920.0 bezogen.

Wir variieren die geozentrischen Distanzen des ersten und dritten Ortes und suchen dadurch den mittleren Ort möglichst gut darzustellen. Diese Bedingung liefert:

$$\delta \log \Delta_1 = +0.000192;\ \delta \log \Delta_3 = -0.000063.$$

Damit ergibt sich;

$$\delta \log r_1 = +0.000088;\ \delta \log r_3 = -0.000042.$$

Wir erwähnen diese Variationen hier, um zu zeigen, wie beträchtlich sie über den Änderungen liegen, die bei der vierten Hypothese von *Harzer* in unserem zweiten Beispiel eingetreten sind. Diese haben nämlich bei $\log r_i$ $(i = 1, 2, 3)$ $+5, +5, +8$ Einheiten der sechsten Dezimalen ausgemacht. Wenn es bei einer ersten Bahnbestimmung auf besondere Schnelligkeit ankommt, wird es ohne allzu großen Schaden möglich sein, eine *Harzer*sche Hypothese weniger zu rechnen, als zur vollen Ausschöpfung der Methode nötig ist. Bestärkt werden wir in dieser Ansicht noch dadurch, daß

$$\delta \log \sqrt{p} = +0.000088$$

beträgt. Vorher haben wir um jede Einheit der letzten Dezimalen uns bemüht. Natürlich bringt die Variation der geozentrischen Distanzen eine Verringerung der durchschnittlichen Differenzen »Beobachtung – Rechnung«, aber dieselbe ist verhältnismäßig gering, wenn man die starke Änderung von $\log \sqrt{p}$ betrachtet. Für die Zwecke der Verfolgung des Planeten in der Entdeckungsopposition wird es daher vermutlich genügen, die fünfte Dezimale von $\log \sqrt{p}$ sicherzustellen.

Die Variation der geozentrischen Konstanten liefert mit den angegebenen Werten folgende Elemente:

937 Bethgea

t		1920 Aug. 27.0 M. Z. Greenwich
$M(t)$		$18°.7587$
ω	1920.0	$70°.3529$
Ω	1920.0	$243°.8302$
i	1920.0	$3°.6961$
φ		$12°.5953$
$\log \mu^0$		9.4706565
$\log a$		0.3486984

(III)

Die Nachrechnung aller Beobachtungen liefert mit diesem Elementensystem im Sinne »Beobachtung minus Rechnung« folgende Differenzen:

1920 Sept.	$\Delta\alpha$ +	$\Delta\alpha$ −	$\Delta\delta$ +	$\Delta\delta$ −
17.36		$0^s.11$		$3''.2$
17.42		0.00	$0''.1$	
18.43		0.24	0.8	
19.46	$0^s.22$		0.7	
22.38	0.12		1.7	
Norm. Ort (1)	$0^s.34$	$0^s.35$	$3''.3$	$3''.2$

$\sqrt{\frac{1}{5}\Sigma(\Delta\alpha)^2} = 0^s.16$

$\sqrt{\frac{1}{5}\Sigma(\Delta\delta)^2} = 1''.7$

Isolierter Ort (3)

Sept. 94.27 $\Delta\alpha - 0^s.01$, $\Delta\delta\ 0''.0$

1920 Sept.	$\Delta\alpha$ +	$\Delta\alpha$ −	$\Delta\delta$ +	$\Delta\delta$ −
38.36		$0^s.04$	$2''.6$	
39.34		0.05	1.3	
40.37		0.00		$0''.2$
41.36		0.05	0.6	
42.33	$0^s.05$		0.2	
44.35	0.02			2.4
46.33	0.03			1.7
49.37	0.02			0.3
Norm. Ort (2)	$0^s.12$	$0^s.14$	$4''.7$	$4''.6$

$\sqrt{\frac{1}{8}\Sigma(\Delta\alpha)^2} = 0^s.035$

$\sqrt{\frac{1}{8}\Sigma(\Delta\delta)^2} = 1''.53$

Die beiden Normalörter und der dritte isolierte Ort werden also vollständig dargestellt. Die Streuungen sind, insbesondere beim zweiten Normalort, nicht sehr erheblich. Die Nachrechnung der sieben restlichen Beobachtungen, die bei der Bildung der Normalörter nicht berücksichtigt werden konnten, hat ergeben:

1920 Sept.	30.36	35.36	58.34	59.32	66.36	70.25	74.38
$\Delta\alpha^s$	−0.01	−0.08	+0.01	+0.10	−0.03	+0.30	+0.23
$\Delta\delta''$	−4.5	−0.2	−3.0	−4.5	−1.0	+0.6	−4.4

Die Differenzen sind etwas größer als bei den bisherigen Beobachtungen, besonders für die beiden letzten Daten. Es ist dabei zu bedenken, daß sich die Beobachtungen über 77 Tage erstrecken. In einem solchen Zeitraum machen sich schon Störungen bemerkbar, die bisher unberücksichtigt geblieben sind.

Das Elementensystem (III) entspricht den Beobachtungen von 1920 jedenfalls gut genug, um als Grundlage für die Störungsrechnungen zu dienen, denen wir uns nun zuwenden.

b) Darstellung der Beobachtungen aus den Oppositionen von 1916, 1920, 1923, 1927 und 1929.

Der Planet 937 Bethgea ist nachträglich noch auf Platten aus dem Jahre 1916 aufgefunden[1]) und später in den Jahren 1923, 1927 und 1929 beobachtet worden. Mit 1920 stehen also fünf Oppositionen zur Verfügung.

Zur Vereinheitlichung der Rechnung beziehen wir alle Beobachtungen auf Äqu. 1925.0, auf das dann auch das Elementensystem (III) zu transformieren ist. Folgende Beobachtungen werden wir heranziehen:

Beob.-Zeit		1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
Äqu. 1925.0	α	192°.28	346°.54	246°.39	63°.81	162°.97
	δ	−10.50	−0.10	−20.19	+22.55	+1.08

Unser Elementensystem lautet:

937 Bethgea

t		1920 Aug. 27.0 M. Z. Greenwich
$M(t)$		18°.7587
ω	1925.0	70°.3434
Ω		243°.9097
i		3°.6961
φ		12°.5953
$\log \mu^0$		9.4706565
$\log a$		0.3486984

(IIIa)

In Intervallen von 80 Tagen haben wir die speziellen Störungen der Elemente über den Zeitraum der vorliegenden Beobachtungen gerechnet[2]). Die mechanische Integration liefert folgende Störungsbeträge:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
Δi	−0°.0002	0°.0000	+0°.0014	+0°.0022	+0°.0023
$\Delta \Omega$	+0.0293	−0.0015	−0.0443	−0.0920	−0.0973
$\Delta \omega$	−0.1086	−0.0061	−0.0901	−0.0003	−0.0503
ΔM	+0.0416	+0.0060	+0.1157	−0.0153	+0.0988
$\Delta \varphi$	−0.0894	+0.0005	−0.0502	−0.0184	−0.0336
$\Delta \log a$	+0.000137	−0.000011	+0.000061	−0.000048	−0.000035

Damit erhalten wir die zu den angegebenen Zeiten oskulierenden Elementensysteme:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
M (1920 Aug. 27.0)	18°.8003	18°.7647	18°.8744	18°.7434	18°.8575
ω Äqu.	70.2348	70.3373	70.2533	70.3431	70.2931
Ω 1925.0	243.9390	243.9082	243.8654	243.8177	243.8124
i	3.6959	3.6961	3.6975	3.6983	3.6984
φ	12.5059	12.5958	12.5451	12.5769	12.5617
$\log u^0$	9.4706565	9.4706565	9.4706565	9.4706565	9.4706565
$\log a$	0.348835	0.348687	0.348759	0.348650	0.348663

Mit diesen Elementen ergeben sich bei der Darstellung der Beobachtungen die folgenden Abweichungen:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
$\Delta \alpha$	−0°.10	0°.00	+0°.36	+0°.23	+0°.11
$\Delta \delta$	+0.04	0.00	−0.03	0.00	−0.06

Auf diese Abweichungen gründen wir eine Verbesserung der vier Elemente M, ω, φ und μ. Wir können nämlich annehmen, daß Knoten und Neigung infolge der langen Beobachtungsdauer 1920 ziemlich sicher bestimmt sind. Die Verbesserung der vier elliptischen Elemente allein ist wesentlich einfacher durchzuführen als die aller sechs Elemente. Da fünf Oppositionen zur Verfügung stehen, bilden wir aus den fünf Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die vier Normalgleichungen, deren Auflösung liefert:

$$\begin{aligned} dM &= +0°.1340 \\ d\omega &= -0.1382 \\ d\varphi &= -0.0219 \\ d\mu &= +0''.2128 \end{aligned}$$

Diese Verbesserungen bringen wir an das System (IIIa) an und erhalten so ein Elementensys em (IV), das wir bei den vorliegenden Daten aus nur fünf Oppositionen als das bestmögliche ansprechen müssen.

937 Bethgea

t		1920 Aug. 27.0 M. Z. Greenwich
$M(t)$		18°.8927
ω	Äqu.	70°.2052
Ω	1925.0	243°.9097
i		3°.6961
φ		12°.5734
$\log u^0$		9.4707434
$\log a$		0.3486405

(IV)

Bringen wir die gleichen Verbesserungen an die zu den Beobachtungszeiten oskulierenden Systeme an, so lauten diese:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
M (1920 Aug. 27.0)	18°.9343	18°.8987	19°.0084	18°.8774	18°.9915
ω Äqu.	70.0966	70.1991	70.1151	70.2049	70.1549
Ω 1925.0	243.9390	243.9082	243.8654	243.8177	243.8124
i	3.6959	3.6961	3.6975	3.6983	3.6984
φ	12.4840	12.5739	12.5232	12.5550	12.5398
$\log u^0$	9.4707434	9.4707434	9.4707434	9.4707434	9.4707434
$\log a$	0.348778	0.348630	0.348702	0.348593	0.348606

Stellen wir schließlich mit diesen Elementen die Beobachtungen dar, so bleiben nur noch folgende geringfügige Differenzen:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
$\Delta \alpha$	+0°.01	−0°.04	+0°.01	+0°.06	−0°.03
$\Delta \delta$	0.00	−0.02	0.00	−0.01	0.00

Mit der Aufstellung des Elementensystems (IV) ist die engere Aufgabe gelöst, aus den vorhandenen Daten unter Berücksichtigung der Störungen die bestmögliche Bahn zu ermitteln. Jedoch sollen, wie in der Einleitung schon erwähnt, hier noch zwei Methoden der absoluten Störungen herangezogen werden. Einmal die von *Hansen-Bohlin*, um deren numerische Auswertung sich *de la Villemarqué* verdient gemacht hat,

[1]) Identisch mit 1916 Z. J.

[2]) Es hätte genügt, nur bei Jupiterannäherung mit diesem Intervall, sonst mit 160 Tagen zu rechnen.

dann ein Verfahren von *Brendel*. Die Berechnung der speziellen Störungen der Elemente ist mit erheblicher Arbeit verknüpft, selbst bei ihrer vereinfachten Form, die von *Stracke* angegeben[1]) und hier verwendet worden ist. In unserem Falle umfaßt die Rechnung 13 Jahre, was bei 80tägigem Intervall 60 Daten bedeutet. Wählt man das Intervall doppelt so groß, so kommt man allerdings mit 40 Daten aus, falls man sich bei Jupiterannäherung der kürzeren Zwischenzeit bedient. Immerhin erfordert auch die Herstellung der Summationstabelle noch eine ziemliche Arbeit.

Unter dem Titel »Perturbations générales par Jupiter des Petites Planètes dont le moyen mouvement est compris entre 1000″ et 1100″ (Méthode *Hansen-Bohlin* et Tables de *Stromberg*) hat *de la Villemarqué* seine Methode entwickelt[2]). An dem Planeten 364 Isara hat er sie ausführlich zur Anwendung gebracht[3]), die auf den Planeten 937 Bethgea bezüglichen Koeffizienten hat er ebenfalls berechnet[4]). Im Titel der Hauptarbeit nennt der Autor die Namen *Hansen* und *Bohlin*. Mit *Hansen* gemeinsam wählt er die Koordinaten. Von *Bohlin*[5]) stammt der glückliche Gedanke, die kleinen Planeten nach dem Verhältnis ihrer mittleren Bewegung zu derjenigen Jupiters in Gruppen zu teilen. Es lassen sich dann Tafeln für die Störungen der Planeten bilden, die einer Gruppe angehören. Solche Tafeln haben *Bohlin* selbst und andere berechnet. Für

$$\mu_0 = \frac{\text{Mittlere Bewegung Jupiters}}{\text{Mittlere Bewegung d. gest. Planeten}} = \frac{2}{7}$$

hat *Stromberg*[6]) solche Tafeln hergestellt. Diese Tafeln benutzt *de la Villemarqué* zur Aufstellung seiner Koeffizienten für die einzelnen Planeten der Gruppe.

Wie erwähnt, wählt er als gestörte Variablen diejenigen von *Hansen*, nämlich:

$$n\delta z,\ \nu \text{ und } s = \frac{u}{\cos i}$$

die gestörten heliozentrischen rechtwinkligen Koordinaten, bezogen auf den Äquator, werden folgendermaßen gefunden, wobei sich der Index o auf die ungestörten Elemente bezieht:

$$\bar{M} = M_0 + n_0(t - t_0) + n\delta z .$$

Aus $\bar{M}$, a_0, e_0 erhalten wir in üblicher Weise

$$\bar{r} \text{ und } \bar{v} .$$

Die heliozentrischen Koordinaten lauten dann:

$$\begin{cases} x = \bar{r}(1+\nu)\sin a \sin(A' + \bar{v}) + s a_0 \cdot \cos a \\ y = \bar{r}(1+\nu)\sin b \sin(B' + \bar{v}) + s a_0 \cdot \cos b \\ z = \bar{r}(1+\nu)\sin c \sin(C' + \bar{v}) + s a_0 \cdot \cos c \end{cases}$$

$A' = A + \omega_0 \quad B' = B + \omega_0 \quad C' = C + \omega_0 \quad \sin a \quad \sin b \quad \sin c$

sind hierin die *Gauß*-Konstanten. Die Störungsgeträge ν sind nur langsam veränderlich; innerhalb von etwa 40 Tagen wird man sie als konstant ansehen können. Eine Ephemeride für einen solchen Zeitraum liefert somit einen Ellipsenbogen, der dem entsprechenden Bogen der ungestörten Bahn ähnlich sein muß, da die Exzentrizität unverändert bleibt. Im Gegensatz dazu zeigen bei der Methode der speziellen Elementenstörungen alle Elemente Veränderungen.

Die Störungen $n\delta z$, 2ν und s setzt *de la Villemarqué* alle in der Form an:

$$\sum_{ij} (c_{ij}\cos\chi_{ij} + s_{ij}\sin\chi_{ij})$$

dabei sind i und j ganze Zahlen und

$$\chi_{ij} = iE - jA' .$$

E ist die exzentrische Anomalie des gestörten Planeten zu dem Zeitpunkt, für den die Störungen berechnet werden sollen. M' die mittlere Anomalie Jupiters zur gleichen Zeit, so ist

$$A' = M' + \tfrac{2}{7} e_0 \sin E .$$

Hier tritt das für die ganze Gruppe charakteristische Verhältnis $\frac{2}{7}$ auf. Die Störungskoeffizienten c_{ij} und s_{ij} für 937 Bethgea, die von *de la Villemarqué* berechnet sind, teilen wir im folgenden mit. Zu der Tabelle ist noch einiges zu bemerken.

Die letzten Zeilen der Abschnitte 1 – 5 haben wir bei Berechnung der Störungen wegen Geringfügigkeit weggelassen. In den säkularen Gliedern wird t in mittleren Sonnentagen von dem Zeitpunkt an gezählt, in dem die Ausgangselemente oskulieren. Da die Koeffizienten von nt in Bogensekunden ausgedrückt sind, ist nt eine reine Zahl. Ist also die mittlere Bewegung n des gestörten Planeten in Bogensekunden gegeben, so ist nt durch 206265 zu dividieren. Desgleichen sind 2ν und s in den Formeln zur Ermittlung der heliozentrischen Koordinaten reine Zahlen, während die Tafel die Ausdrücke in Bogensekunden liefert, sodaß auch sie durch 206265 dividiert werden müssen.

Berechnen wir nach dieser Tafel $n\delta z$ 2ν und s für die Oskulationsepoche der Ausgangselemente, also für $t = 0$, $E = E_0$, $M' = M_0'$, so fallen zwar die säkularen Glieder weg, aber $n\delta z$, 2ν und s werden im allgemeinen nicht verschwinden, wie wir es verlangen müssen. Dies liegt daran, daß in der Tafel von *de la Villemarqué* die von Fall zu Fall verschiedenen Integrationskonstanten nicht berücksichtigt werden konnten. Die Schwierigkeit beseitigen wir nach dem Vorbild, das *de la Villemarqué* an seinem Beispiel 364 Isara gegeben hat.

---

[1]) *Stracke, G.*: Genäherte Störungsrechnung und Bahnverbesserung. Veröffentlichung des Astronom. Rechen-Inst. zu Berlin-Dahlem. Nr. 44, Berlin 1924. Des gleichen Verfassers »Tafeln zur genäherten speziellen Störungsrechnung«, Veroffentl. des Astron. Rechen-Inst. Nr. 48, konnten noch nicht berücksichtigt werden.

[2]) Journal des observateurs, Vol. XI, No. 5.

[3]) » » » Vol. XI, No. 3.

[4]) » » » Vol. XII, No. 7.

[5]) *Bohlin, K.*: »Sur la développement des perturbations planétaires«, Annales de l'Observatoire de Stockholm, vol. 7, 1902.

[6]) *Stromberg, M. G.*: Annales des Stockholm, vol. 10, Nr. 3.

937 Bethgea.

i	j	$n\delta z$		2ν		$s = u/\cos i$	
		c_{ij}	s_{ij}	c_{ij}	s_{ij}	c_{ij}	s_{ij}
0	0	− 22″.242 nt	0″.0	− 0″.160 nt	0″.0	− 0″.147 nt	0″.0
1	0	− 6.974 nt	+ 0.962 nt	− 0.980 nt	− 6.974 nt	+ 0.675 nt	− 1.679 nt
1	0	+ 1.5	+ 11.9	− 5.4	+ 0.9	− 1.1	− 0.3
2	0	+ 0.378 nt	− 0.053 nt	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0	0.0	− 1.1	+ 0.5	+ 0.2	− 0.1	− 0.1
−1	1	+ 1.1	+ 1.1	+ 1.6	− 1.9	− 1.2	− 1.1
0	1	+ 28.7	− 5.1	+ 5.8	+ 3.5	− 1.7	− 1.0
1	1	+ 89.6	− 52.1	+ 38.2	+ 68.9	+ 1.6	+ 1.1
2	1	− 0.7	+ 1.2	+ 1.7	+ 4.3	+ 0.1	+ 0.8
3	1	− 0.2	+ 0.1	− 0.1	0.0	0.0	− 0.1
0	2	− 0.3	− 3.8	+ 7.8	− 17.2	− 0.3	+ 3.1
1	2	− 210.7	− 121.6	+ 76.8	− 137.6	− 0.1	− 3.6
2	2	− 80.1	− 41.5	+ 55.3	− 105.5	+ 0.6	− 1.0
3	2	+ 6.0	+ 3.3	− 0.9	+ 0.9	− 0.1	+ 0.1
4	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	3	− 175.4	+ 141.3	− 111.8	− 49.9	− 0.3	− 0.4
2	3	− 47.5	+ 116.2	− 127.6	− 52.3	− 3.8	+ 2.5
3	3	+ 2.4	− 13.4	+ 14.4	− 0.9	+ 0.2	0.0
4	3	+ 0.1	+ 0.8	− 0.2	− 0.1	0.0	0.0
5	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	4	− 58.4	− 19.4	− 17.0	− 56.3	− 1.3	− 2.2
3	4	− 7.0	+ 1.0	− 0.8	− 9.2	− 0.3	− 0.1
4	4	+ 2.3	− 1.3	+ 1.8	+ 2.6	0.0	0.0
5	4	− 0.1	+ 0.1	0.0	− 0.1	0.0	0.0
3	5	+ 3.9	+ 3.9	− 3.7	+ 2.4	− 0.1	+ 0.2
4	5	− 1.1	− 1.1	+ 1.7	− 1.2	0.0	− 0.1
5	5	+ 0.3	+ 0.3	+ 0.4	+ 0.7	0.0	0.0

Wir fügen zu unseren 1920 oskulierenden Elementen für alle Daten 1916, 1920, 1923, 1927 und 1929 (also einschließlich 1920!) die nach der Tabelle errechneten Störungsbeträge hinzu. Dann haben wir die Störungen zwar berücksichtigt, aber die Darstellung für 1920 verfälscht. Diesen Fehler gleichen wir wieder aus, indem wir eine Bahnverbesserung vornehmen, wodurch gleichzeitig die sonstige Unvollkommenheit der Ausgangselemente gebessert wird.

Die Berechnung von $n\delta z$, 2ν und s geht folgendermaßen vor sich: man stellt zunächst $\frac{n''(t-t_0)}{206265}$, E, M', $A' = M' + \frac{2}{7} e_0 \sin E$ für das betreffende Datum t zusammen. Spaltenweise bilden wir darauf iE, jA', $(iE - jA') = \chi_{ij}$, $\cos\chi_{ij}$, $\sin\chi_{ij}$. Für die drei Größen $n\delta z$, 2ν und s kommen dann die Spalten $c_{ij}\cos\chi_{ij}$ und $s_{ij}\sin\chi_{ij}$ und zwar jede untergeteilt in positive und negative Werte, um die Addition zu erleichtern. Die Multiplikationen werden direkt, ohne Logarithmen, ausgeführt. Es handelt sich um $22 \times 6 = 132$ Produkte, von denen allerdings nicht wenige verschwinden oder leicht zu bestimmende kleine Werte annehmen. Die Produkte runden wir auf Zehntelsekunden ab[1]). Die Berechnung von $n\delta z$, 2ν und s bringt man für je ein Datum bequem auf einer karierten Folioseite unter, deren Quadratseiten 0.5 cm sind.

Die Ermittlung von $n\delta z$, 2ν und s geht ziemlich rasch. Bemerkenswert ist vor allem, daß nach Bestimmung von $\cos\chi_{ij}$ und $\sin\chi_{ij}$ nur Multiplikationen und Additionen auszuführen sind. Daher eignet sich die Methode hervorragend zur Benutzung von Rechenmaschinen, wodurch eine weitere Ersparnis an Arbeit eintritt.

Wir haben angenommen, daß die Ausgangselemente (IIIa) für 1920 Oktober 6.0 oskulieren[2]). Für unsere früheren Daten erhalten wir:

[1]) Die Genauigkeit von 0″.1 ist bei Benutzung genäherter Elemente an sich übertrieben.

[2]) Dieses Datum fällt in den Bereich der Beobachtungen. Ursprünglich sollten von ihm aus auch die speziellen Störungen gerechnet werden, doch eigenete sich dafür nach den in Veröffentl. d. Astron. Recheninst. zu Berlin, Nr. 44, in 80tägigen Intervallen abgedruckten Jupiterkoordinaten besser 1920 Aug. 27.0. Der Unterschied von 40 Tagen ist bei der Geringfügigkeit der Störungen ohne wesentliche Bedeutung.

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr 9
$n\delta z$	+ 492″.0	− 84″.7	− 98″.6	− 42″.2	− 175″.9
	+ 0°.1367	− 0°.0235	− 0°.0274	− 0°.0117	− 0°.0489
$2\nu''$	+ 47″.4	− 507″.8	− 103″.4	− 52″.3	− 61″.4
$\log(1+\nu)$	0.000050	9.999465	9.999891	9.999945	9.999935
s''	− 6″.7	+ 0″.2	+ 5″.1	− 23″.5	− 8″.4
$a_0 s$	−0.0000725	+0.0000022	+0.000055	−0.000254	−0.0000909

Bringen wir diese Störungen an und rechnen nach den mitgeteilten Formeln die Beobachtungen nach, so ergeben sich folgende Abweichungen:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
$\Delta\alpha$	−0°.12	+0°.10	+0°.68	−0°.01	+0°.08
$\Delta\delta$	+0.04	+0.03	−0.06	−0.03	−0.05

Es darf nicht befremden, daß die Abweichungen zum Teil recht hoch sind. Denn dadurch, daß die Integrationskonstanten nicht bestimmt worden sind, ist künstlich zunächst ein Fehler hineingebracht worden, den die nachfolgende Bahnverbesserung wieder ausmerzt. Die Bahnverbesserung beschränken wir, wie früher, der Einfachheit halber auf die vier elliptischen Elemente. Wir können dies auch hier tun, da für 1920 die einzige Störungsgröße, die die Stellung der Bahnebene betrifft, nämlich s, einen ganz geringen Wert hat. Das Ergebnis der Verbesserung lautet:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= +0°.4227 \\ \mathrm{d}\omega &= -0°.4355 \\ \mathrm{d}\varphi &= -0°.0580 \\ \mathrm{d}\mu &= +0″.2036 \end{aligned}$$

Bringen wir diese Verbesserungen an (IIIa) an, so erhalten wir:

937 Bethgea

t		1920 Okt. 6.0 M. Z. Greenwich	
$M(t)$		31°.0064	
ω	Äqu.	69°.9079	
Ω	Äqu.	243°.9097	
i	1925.0	3°.6961	(V)
φ		12°.5373	
$\log\mu^0$		9.4707397	
$\log a$		0.3486430	

Es sei ausdrücklich betont, daß diese Elemente zur angegebenen Epoche nicht oskulieren. Vielmehr treten zu ihnen die früher angegebenen Störungsbeträge nach *de la Villemarqué* hinzu. Ein direkter Vergleich mit (IV) ist darum nicht möglich. Immerhin sei darauf aufmerksam gemacht, daß die von diesen Störungen nur schwach abhängende Größe $\log\mu^0$, das wichtigste Element, in (IV) und (V) nahezu übereinstimmende Werte hat:

$$\begin{aligned} \log\mu^0\,(\mathrm{IV}) &= 9.4707434 \\ \log\mu^0\,(\mathrm{V}) &= 9.4707397 \end{aligned}$$

Berechnen wir abschließend die Beobachtungen nach (V) einschließlich der Störungen, so ergibt sich:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
$\Delta\alpha$	−0°.03	−0°.04	0°.00	−0°.01	+0°.04
$\Delta\delta$	+0.02	−0.02	0.00	−0.02	−0.03

Dagegen hatten wir mit speziellen Elementenstörungen erhalten:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
$\Delta\alpha$	+0°.01	−0°.04	+0°.01	+0°.06	−0°.03
$\Delta\delta$	0.00	−0.02	0.00	−0.01	0.00

Wie man sieht, sind die Abweichungen nur noch gering, sodaß die Darstellung befriedigt. Sie stimmt allerdings mit der nach der Methode der speziellen Elementenstörungen erhaltenen nicht ganz überein; nur in den Jahren 1920 und 1923 ist dies der Fall. Der Planet Bethgea eignet sich aber zu solchen Vergleichen wenig, weil die Störungen bei ihm sehr gering sind.

Ein großer Teil der Arbeit bei dieser Methode der Störungsrechnung liegt in der Aufstellung der Störungstabellen. Diese sind dann aber auch für einen langen Zeitraum verwendbar, und es dürfte möglich sein, für einen längere Zeit nicht beobachteten Planeten für eine bestimmte Opposition die Störungen durch ein ziemlich kurzes, für maschinelles Rechnen geeignetes Verfahren zu bestimmen. Erst in solchen Fällen würde der Vorzug dieser absoluten Methode gegenüber der speziellen Elementenstörungen recht zur Geltung kommen. Als Vorteil sehe ich es auch an, daß ein Rechenfehler bei absoluten Störungen nur den gerade behandelten Zeitpunkt betrifft, während bei mechanischer Integration alle späteren Ziffern durch einen einzigen Fehler in Mitleidenschaft gezogen werden. Da es recht mühsam ist, einen solchen Fehler zu ermitteln, ist diese Tatsache von nicht geringer Bedeutung.

Um unsere Rechnungen auch für spätere Oppositionen verwertbar zu machen, wollen wir im folgenden noch die Formeln zusammenstellen, nach denen die rechtwinkligen, auf den Äquator für 1925.0 bezogenen, heliozentrischen Koordinaten für einen beliebigen Zeitpunkt zu berechnen sind.

$$\left.\begin{aligned} x &= (1+\nu)\bar{r}\,[9.99927]\sin(\bar{v}+\ 44°\,12'.4) + s\,[9.11132] \\ y &= (1+\nu)\bar{r}\,[9.96783]\sin(\bar{v}+312\ \ 52.7) + s\,[9.91813] \\ z &= (1+\nu)\bar{r}\,[9.57471]\sin(\bar{v}+322\ \ 26.0) + s\,[0.31567] \end{aligned}\right\}\ \text{Äqu. } 1925.0$$

Die Ziffern in den eckigen Klammern [ ] sind Logarithmen, $\bar{r}$ und $\bar{v}$ sind Radiusvektor und wahre Anomalie einer Ellipse, für die folgende Daten gelten

$$M = 31°.0064 + [9.4707397]\,(t - 1920\ \text{Okt.}6.0\ \text{M.Z.Grw.}) + n\delta z$$
$$\log a_0 = 0.3486430$$
$$\varphi = 12°.5373$$

Die Störungsbeträge $n\delta z$, 2ν und s werden der Tafel für 937 Bethgea ohne Hinzufügung von Integrationskonstanten entnommen. Als Anfangspunkt der Zeitzählung gilt:

$$t_0 = 1920\ \text{Okt. } 6.0\ \text{M. Z. Greenwich.}$$

Schließlich wollen wir noch das Verfahren von *Brendel* prüfen, das sich durch besondere Kürze auszeichnet. Dieselbe wird aber mit einem schweren Nachteil erkauft. Die *Brendel*-Koeffizienten gelten nämlich nur streng für ein Ausgangselementensystem, das 1900.0 oskuliert, von welchem Zeitpunkt an die Störungen zu rechnen sind. In unserem Falle besitzen wir aber nur ein Elementensystem mit der Oskulationsepoche im Herbst 1920. Man kann sich dadurch helfen, daß man die mehr als rohe Annahme macht, dieses System sei auch für 1900.0 gültig. Dann bringt man an dasselbe die Störungsbeträge an und rechnet die Beobachtungen nach. Der systematische Fehler bedingt natürlich erhebliche Abweichungen. Gegen unser, äußerlich ähnliches Vorgehen bei Verwendung der Störungen von *de la Villemarqué* besteht ein wichtiger Unterschied. Zwar sind auch da nicht die Störungsbeträge für 1920 verschwunden, wohl aber ihre säkularen Glieder, sodaß nur die periodischen Glieder übrig geblieben sind, deren absoluten Werte eine obere Schranke besitzen. Damit wird der Fehler von vornherein begrenzt. Anders bei *Brendel*, wenn man, wie geschildert, vorgeht. Seine Störungswerte haben nämlich folgende Form[1]):

$$\begin{aligned}\delta L = &+0^\circ.06\cos[16^\circ.89t + 214^\circ]\\ &+0.07\cos[47^\circ.24t + 12^\circ]\\ &+0.03\cos[2(77^\circ.59t + 116^\circ) + 90^\circ]\\ &+0.03\cos[77^\circ.59t + 116^\circ]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\pi &= +0^\circ.010t & \delta M &= \delta L - \delta\pi\\ \delta\Omega &= -0.010t & \delta\omega &= -\delta\pi - \delta\Omega\\ \delta i &= -\delta\varphi = \delta\mu = \delta\log a = 0\end{aligned}$$

t ist zu zählen in Jahren von 1900.0 an.

Wie wir sehen, sind $\delta\pi$ und $\delta\Omega$ säkular. Insbesondere nimmt $\delta\Omega$ für Oktober 1920 der Wert $-0^\circ.2075$ an, der gemäß dem geschilderten Vorgehen zu Ω des Systems (IIIa) hinzuzufügen ist. Dieser systematische Fehler soll ja durch eine Bahnverbesserung beseitigt werden. Es ist daher selbstverständlich, daß alle sechs Elemente verbessert werden müssen. *Brendel* selbst wählt auch diesen Weg und gibt dazu ein ziemlich umständliches Verfahren an[2]). Dadurch geht der Vorteil, den die leichte Berechnung der absoluten Störungen bringt, wieder verloren. Wir wollen für 1900.0 ein Elementensystem wählen, das nach Anbringung der *Brendel*-Störungen

1. für Herbst 1920 in i und Ω mit (IIIa) übereinstimmt, und
2. die Beobachtungen von 1920 auf $(10^{-2})^0$ genau darstellt.

Durch diese Bedingungen ist das System keineswegs eindeutig bestimmt. Jede Wahl birgt also einen Fehler in sich, der später durch eine Bahnverbesserung beseitigt werden muß. Wichtig ist aber, daß das Element Ω jetzt nicht mit einem systematischen Fehler behaftet wird.

Wir haben folgende Wahl getroffen:

i, φ, μ, a für 1900.0 unverändert wie 1920.75

$$\begin{aligned}M_{1900.0} &= M_{1920.75} - \delta M_{1920.75}\\ \Omega_{1900.0} &= \Omega_{1920.75} - \delta\Omega_{1920.75}\\ \omega_{1900.0} &= \omega_{1920.75} - \delta\omega_{1920.75}\end{aligned}$$

Dadurch wird den Bedingungen 1. und 2. genügt. An Stelle von (IIIa) tritt dann folgendes hypothetisches System:

937 Bethgea

t		1900 Jan. 1.0 M. Z. Greenwich
$M(t)$		$309^\circ.5294$
ω	Äqu.	$69^\circ.9284$
Ω	1925.0	$244^\circ.1172$
i		$3^\circ.6961$
φ		$12^\circ.5953$
$\log\mu_0$		9.4706565
$\log a$		0.3486984

(IIIb)

Zu diesem System sind für die einzelnen Oppositionen folgende *Brendel*-Störungen zu addieren:

Zeit t	1916.25	1920.75	1923.55	1927.83	1929.11
δM	$-0^\circ.1266$	$-0^\circ.2357$	$-0^\circ.1997$	$-0^\circ.2468$	$-0^\circ.2434$
$\delta\Omega$	−0.1625	−0.2075	−0.2355	−0.2783	−0.2911
$\delta\omega$	+0.3250	+0.4150	+0.4710	+0.5566	+0.5822

Rechnen wir darauf die Beobachtungen nach, so erhalten wir:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
$\Delta\alpha$	$+0^\circ.01$	$0^\circ.00$	$+0^\circ.44$	$-0^\circ.15$	$-0^\circ.07$
$\Delta\delta$	0.00	0.00	−0.03	−0.04	+0.01

Da das Ausgangssystem bis zu einem gewissen Grade willkürlich gewählt ist, können die teilweise ziemlich erheblichen Abweichungen nicht erstaunen. Wir benutzen sie zu einer Verbesserung des Systems (IIIb) und bekommen folgende Verbesserungen

$$\begin{aligned}dM &= +0^\circ.2121\\ d\omega &= -0.3212\\ d\varphi &= -0.0517\\ d\mu &= +0''.0446\end{aligned}$$

Fügen wir dieselben zu den Elementen (IIIb) hinzu, so ergibt sich das endgültige System:

937 Bethgea

t		1900 Jan. 1.0 M. Z. Greenwich
$M(t)$		$309^\circ.7415$
ω	Äqu.	$69^\circ.6072$
Ω	1925.0	$244^\circ.1172$
i		$3^\circ.6961$
φ		$12^\circ.5436$
$\log\mu^0$		9.4706748
$\log a$		0.3486862

(VI)

Die letzten vier Zeilen gelten für einen beliebigen Zeitpunkt. Unter Berücksichtigung der Störungen lauten die restlichen Elemente für die einzelnen Beobachtungszeiten:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
$M(t)$	$264^\circ.3221$	$37^\circ.4905$	$320^\circ.4035$	$73^\circ.0376$	$211^\circ.9659$
ω Äqu.	69.9322	70.0222	70.0782	70.1638	70.1894
Ω 1925.0	243.9547	243.9097	243.8817	243.8389	243.8261

[1]) Gerechnet von *K. Boda*, AN **238**.7.

[2]) *Brendel, M.*: Mitteilungen der Universitätssternwarte, Heft 3, Frankfurt a. M. 1922.

Eine Darstellung der Beobachtungen mit diesen Elementen liefert folgendes Ergebnis, dem wir wieder das mit der Methode der speziellen Elementenstörungen erzielte Resultat gegenüberstellen:

Zeit	1916 April 3	1920 Okt. 28	1923 Juni 12	1927 Okt. 28	1929 Febr. 9
$\Delta\alpha$	−0°.02	−0°.06	+0°.01	+0°.04	−0°.02
$\Delta\delta$	+0.02	−0.02	0.00	−0.02	−0.01

Darstellung bei Verwendung von speziellen Elementenstörungen:

$\Delta\alpha$	+0°.01	−0°.04	+0°.01	+0°.06	−0°.03
$\Delta\delta$	0.00	−0.02	0.00	−0.01	0.00

DieAbweichungen sind an sich nicht bedeutend und stimmen vor allem nach Richtung und Größe mit den zum Vergleich gestellten Differenzen nahezu überein. Dieses Ergebnis ist sehr befriedigend, jedenfalls, wenn wir bedenken, wie wenig Arbeit die Berechnung der *Brendel*-Störungen macht. Wie ein Blick auf die Formeln sofort lehrt, läßt sich die Berechnung der *Brendel*-Störungen für alle fünf Oppositionen glatt auf einer halben Folioseite unterbringen! Allerdings ist hierbei die Aufstellung der Störungskoeffizienten nicht berücksichtigt. Für Planeten, deren mittlere Bewegung zwischen 798″ und 854″ beträgt, können sie Tafel I in den »Mitteilungen der Universitätssternwarte Frankfurt, Heft 3« direkt entnommen werden. Wenn einmal in gleicher Weise für alle praktisch wichtigen Intervalle diese kleinen Täfelchen vorliegen, hat man die *Brendel*schen Störungskoeffizienten für beliebige Planeten sofort zur Hand, allerdings nur für die Ausgangsepoche 1900.0. Die Annehmlichkeiten für den Rechner sind bestechend, es läßt sich aber nicht leugnen, daß für größere Zeiträume der Methode *Brendel* gewisse Mängel anhaften. Die Störungen werden in zu enge Fesseln gelegt, denen sich die vielgestaltigen wahren Bahnen des Dreikörperproblems ohne Zwang nicht anpassen können. Bei unserem Planeten sind wegen $\delta \log a = 0$ und $\delta\varphi = 0$ die Oskulationsellipsen untereinander kongruent. $\delta i = 0$ bedeutet, daß ihre Ebenen stets einen Kegel berühren, dessen Spitze in der Sonne liegt. Aus »$\delta\Omega$ proportional t« lesen wir ab, daß die Bahnebene auf diesem Kegel gleichmäßig abrollt. In der Bahnebene dreht sich die starre Bahnellipse gleichförmig um die Kegelspitze, was aus »$\delta\omega$ proportional t« hervorgeht. Die Bewegung läßt sich also kurz so beschreiben, daß die Apsidenlinie der Bahn eine ausgeartete Präzessionsbewegung ausführt. So lehrreich es an sich ist, daß die komplizierten Verhältnisse der Störungen durch Jupiter sich derart anschaulich und einfach darstellen lassen, so geht eben doch daraus hervor, daß die Annäherung auf die Dauer etwas gering sein wird. Denn die Berechnung der speziellen Elementenstörungen hat ergeben, daß alle Elemente gestört werden. Damit müssen auch notgedrungen zwischen den oskulierenden Elementen beider Methoden größere Unterschiede bestehen, wie es ja auch der Fall ist.

Es sei hier aber eingeschaltet, daß ein Teil der erwähnten Beschränkungen nur speziell bei unserem Planeten auftritt. Aus den allgemeinen Formeln von *Brendel*[1]) ergibt sich, daß zwar stets die Bahnebene gleichförmig auf einem Kegel abrollt. Die Bahnellipsen bleiben aber nicht mehr kongruent und drehen sich auch nicht mehr gleichförmig. Die Koeffizienten, die die Abweichungen von den einfachen Verhältnissen bewirken, die bei Bethgea vorliegen, sind aber stets klein.

Wir wollen bei allen Bedenken festhalten, daß in unserem Beispiel das *Brendel*sche Verfahren mit einem Minimum an Arbeit zu einer Darstellung der Beobachtungen geführt hat, die von der mit speziellen Elementenstörungen erhaltenen nur unwesentlich abweicht, ein schöner Erfolg!

Zur vollen Beurteilung hätte es allerdings Beobachtungen aus einem weit größeren Zeitraum bedurft (in unserem Falle 13 Jahre). Zudem sind die Störungen bei Bethgea so gering, daß die Beobachtungen auch ohne Berücksichtigung derselben nahezu ebensogut dargestellt werden können.

[1]) l. c. S. 106.

937 Bethgea = [1920 HO].

Beobachtungen.

Datum	Beob.-Zeit	α app.	$\log p_\alpha \cdot \Delta$	δ app.	$\log p_\delta \cdot \Delta$	Red. a. lop. app.	
1916 M. Z. Heidelberg AN **204**.403 u. **206**.63							
April 3	$12^h32^m25^s$	$12^h48^m38^s.93$	8.720	$-10°27'25''.3$	0.879	Äqu. 1916.0	
28	10 25.0	12 25 56.02		− 7 21 26.8			
1920 M. Z. Kgst. AN **214**.113							
Sept. 17	10 44 9	23 15 54.50	8.883_n	+ 3 42 7.1	0.798	$+4^s.13$	$+27''.8$
19	11 40 37	14 21.16	8.524	+ 3 26 56.0	0.799	+4.13	+28.0
Okt. 8	9 15 30	4 20.59	8.811_n	+ 1 13 18.7	0.815	+4.05	+28.5
9	8 52 41	4 6.36	8.981_n	+ 1 7 26.1	0.815	+4.05	+28.5
11	9 18 17	3 43.19	8.602_n	+ 0 55 58.5	0.817	+4.03	+28.5
19	9 39 47	3 33.78	8.669	+ 0 18 23.0	0.821	+3.98	+28.3
1920 M. Z. Wien AN **214**.371							
Sept. 17	9 40 5	23 15 57.59	9.258_n	+ 3 42 33.0	0.791	+4.13	+27.8
18	11 27 54	15 7.51	7.696	+ 3 34 38.4	0.789	+4.13	+27.9
22	10 19 24	12 14.45	8.903_n	+ 3 4 58.5	0.793	+4.13	+28.2
30	9 53 45	7 24.64	8.793_n	+ 2 6 2.1	0.800	+4.11	+28.5
Okt. 5	9 49 9	5 15.61	8.516_n	+ 1 32 2.2	0.804	+4.08	+28.5
10	10 5 4	3 53.46	8.506	+ 1 1 28.7	0.808	+4.04	+28.5
12	9 14 32	3 35.09	8.525_n	+ 0 50 42.3	0.807	+4.02	+28.5
14	9 42 27	3 24.19	8.289	+ 0 40 21.1	0.810	+4.01	+28.5
16	9 1 48	3 21.88	8.561_n	+ 0 31 5.4	0.811	+4.02	+28.4
28	9 20 32	5 56.70	8.853	− 0 7 18.5	0.816	+3.90	+27.9
29	8 48 47	6 21.77	8.369	− 0 9 1.0	0.816	+3.89	+27.9
Nov. 5	9 52 55	10 10.55	9.226	− 0 15 14.6	0.816	+3.81	+27.5
9	7 8 58	12 53.13	8.924_n	− 0 14 6.7	0.817	+3.81	+27.3
13	8 25 22	16 6.90	8.829	− 0 9 43.3	0.816	+3.77	+27.1
Dez. 3	7 47 44	37 11.16	9.005	+ 0 56 13.3	0.808	+3.67	+25.7
1923 M. Z. Simeïs							
Juni 12	11 4.4	16 25 27.58		−20 11 21.1		Äqu. 1923.0	
1927 M. Z. Kgst.							
Okt. 28	13 25.0	4 15 21.99		+22 33 28.3		Äqu. 1927.0	
1927 Z. Simeïs							
Nov. 1	22 13.7	4 12 1.08		+22 18 27.5		Äqu. 1927.0	
1929 M. Z. Kgst.							
Febr. 9	13 40.2	10 52 4.50		+ 1 3 38.8		Äqu. 1929.0	

Lebenslauf

Geboren bin ich, *Hermann von Schelling*, am 25. Mai 1901 als Sohn des Wirkl. Geh. Kriegsrats Dr. jur. Ulrich von Schelling und seiner Ehefrau Lina, geb. von Jagemann. Ich bin evangelischer Konfession.

Ostern 1910 kam ich auf das Kaiserin Augusta Gymnasium zu Charlottenburg. Zwei Jahre darauf erkrankte ich an spinaler Kinderlähmung und behielt eine schwere Bewegungshemmung zurück. Privatim weiter unterrichtet, bestand ich im August 1919 am vorgenannten humanistischen Gymnasium als extraneus das Abiturientenexamen.

Vom Herbst 1919 bis zum Schluß des Sommersemesters 1923 war ich an der Berliner Universität immatrikuliert, vornehmlich um Mathematik zu studieren. Vom Sommer 1921 an war ich zudem als Hörer bei der nahegelegenen Technischen Hochschule eingetragen, wo es mir bei meiner Behinderung leichter möglich war, Vorlesungen regelmäßig zu besuchen.

Infolge meines körperlichen Zustandes kam es 1923 nicht zum Abschluß meines Studiums. Ich habe mich in der Folgezeit im Selbststudium fortzubilden gesucht und mich mathematischen Anwendungsgebieten mehr und mehr zugewandt, insbesondere der theoretischen Astronomie. Herr Prof. Dr. *Kopff* hat mich darin bestärkt und meine Studien in jeder Hinsicht gefördert. Ihm verdanke ich auch die Anregung, trotz meiner Behinderung den Versuch der Promotion zu machen.

Zur Ergänzung meines früheren Hochschulstudiums durch Vorlesungen und Übungen aus den Gebieten der Astronomie und theoretischen Physik war ich vom Sommersemester 1929 bis zum Sommersemester 1930 einschließlich zum zweiten Male auf der Berliner Universität immatrikuliert.